CMIMC 2018-2020

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. قارهٔ Trianglandia یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۹ است که به ۸۱ کشور مثلثی به ضلع ۱ تقسیم شده است. هر کشور منابع کافی برای انتخاب حداکثر ۱ ضلع از ۳ ضلع خود و ساختن یک «دیوار» که تمام آن ضلع را بپوشاند، دارد. با این حال، چون تمام کشورها در حال جنگ هستند، هیچ دو کشوری مایل نیستند که دیوارهایشان با هم تماس داشته باشند، حتی در یک گوشه. حداکثر تعداد دیوارهایی که می‌توان در Trianglandia ساخت چقدر است؟

CMIMC 2020

پرسش ۲. هفت کارت شماره‌گذاری شده از ۱ تا ۷ به ترتیب صعودی از بالا به پایین روی هم قرار گرفته‌اند (۱ در بالا، ۷ در پایین). یک «بر زدن» شامل انتخاب تصادفی یکی از ۶ کارتی است که در حال حاضر در بالا نیستند و قرار دادن آن در بالا می‌باشد. ترتیب نسبی سایر کارت‌ها تغییر نمی‌کند. احتمال اینکه پس از ۱۰ بار بر زدن، کارت ۶ در پشته بالاتر از کارت ۳ باشد را بیابید.

CMIMC 2020

پرسش ۳. کشور CMIMCland از ۸ جزیره تشکیل شده است که هیچ‌کدام به هم متصل نیستند. هر شهروند می‌خواهد از سایر جزایر بازدید کند، پس دولت بین جزایر پل خواهد ساخت. با این حال، هر جزیره آتشفشانی دارد که ممکن است هر لحظه فوران کند و آن جزیره و تمام پل‌های متصل به آن را نابود کند. دولت می‌خواهد تضمین کند که پس از هر فوران، یک شهروند از هر یک از ۷ جزیرهٔ باقی‌مانده بتواند سفری انجام دهد که در آن هر یک از ۷ جزیرهٔ باقی‌مانده را دقیقاً یک‌بار بازدید کند و در پایانِ سفر به جزیرهٔ شروع بازگردد (بازگشت فقط در انتهای سفر مجاز است). حداقل چند پل لازم است؟

CMIMC 2020

پرسش ۴. یک گراف کامل با ۲۰۲۰ رأس را در نظر بگیرید. حداقل تعداد یال‌هایی که باید علامت‌گذاری شوند چقدر است تا هر مثلث (زیرگراف ۳ رأسی) تعداد فردی یال علامت‌گذاری شده داشته باشد؟

CMIMC 2020

پرسش ۵. پاتریک چهار تاس چهاروجهی را پرتاب می‌کند که هر کدام اعدادی از ۱ تا ۴ روی خود دارند. احتمال اینکه حاصل‌ضرب آن‌ها مضربی از ۴ باشد، چقدر است؟

CMIMC 2019

پرسش ۶. به چند طریق می‌توان رئوس یک مکعب را با سه رنگ قرمز، آبی یا سبز رنگ‌آمیزی کرد، به‌طوری که هیچ یالی دو رأس هم‌رنگ را به هم متصل نکند؟ دوران‌ها و تقارن‌ها، رنگ‌آمیزی‌های مجزا در نظر گرفته می‌شوند.

CMIMC 2019

پرسش ۷. چند سه‌تاییِ مرتب (a,b,c) از اعداد صحیح وجود دارد که $۱ \leq a \leq b \leq c \leq ۶۰$ را ارضا کند و همچنین $a \cdot b = c$ باشد؟

CMIMC 2019

پرسش ۸. یک الگوریتم جستجو به نام جست‌وجوی توانی تعریف کنید. در تمام سؤال فرض کنید A یک آرایهٔ مرتبِ ۱-اندیسی از اعداد صحیحِ متمایز است. برای جستجوی عدد b در این آرایه، اندیس‌های $۲^۰, ۲^۱, ۲^۲, \ldots$ را بررسی می‌کنیم تا به انتهای آرایه برسیم. اگر در جایی $A[۲^k] = b$ شود، متوقف شده و ۲^k را برمی‌گردانیم. اگر در جایی $A[۲^k] > b > A[۲^{k-۱}]$ شود، آنگاه $۲^{k-۱}$ عنصرِ اولِ A را کنار می‌گذاریم و به‌صورت بازگشتی همین کار را روی زیرآرایهٔ باقی‌مانده انجام می‌دهیم (مثلاً اگر عدد در موقعیت ۳ باشد، مکان‌های $۱, ۲, ۴, ۳$ بررسی می‌شوند). تابع $g(x)$ را تعداد (نه لزوماً متمایز) اندیس‌هایی تعریف کنید که هنگام اجرای جست‌وجوی توانی برای عنصری که در موقعیت x قرار دارد بررسی می‌شوند. مثلاً $g(۳) = ۴$. اگر طول A برابر ۶۴ باشد، مقدار $g(۱) + g(۲) + \cdots + g(۶۴)$ را بیابید.

CMIMC 2019

پرسش ۹. در بازی «ریک-رک-رو» (Ric-Rac-Roe)، دو بازیکن به نوبت خانه‌های یک جدول ۳×۳ را به رنگ خود در می‌آورند؛ هر بازیکنی که بتواند یک سطر یا ستون کامل از رنگ خود ایجاد کند، برنده است. اگر آلیس و باب این بازی را انجام دهند و در هر نوبت به‌طور تصادفی یک خانهٔ رنگ‌نشده را انتخاب کنند، احتمال مساوی شدن بازی چقدر است؟

CMIMC 2019

پرسش ۱۰. ۱۰۰ لامپ $B_1, \ldots, B_{100}$ به‌طور یکنواخت روی یک دایره و به همین ترتیب قرار گرفته‌اند. همچنین ۱۰۰ کلید $S_1, \ldots, S_{100}$ داریم به‌طوری‌که برای هر $۱ \leq i \leq ۱۰۰$، کلید S_i حالت دو لامپ B_{i-1} و B_{i+1} را عوض می‌کند، که در آن $B_{101} = B_1$ و $B_0 = B_{100}$. دیوید تصمیم می‌گیرد هر کلید را با احتمال $\frac{۱}{۲}$ فشار دهد. امید ریاضی تعداد لامپ‌هایی که در پایان روشن هستند چقدر است، مشروط بر اینکه در ابتدا همهٔ لامپ‌ها خاموش نباشند؟

CMIMC 2019

پرسش ۱۱. مجموعه L از رشته‌های باینری (دودویی) با طول کمتر یا مساوی ۹ را در نظر بگیرید. برای یک رشته w، مجموعه w^+ را به صورت $\{w, w^۲, w^۳, \ldots\}$ تعریف می‌کنیم، که در آن w^k نشان‌دهنده رشته w است که k بار به خودش متصل شده است. به چند روش می‌توان یک زوج مرتب از عناصر $x, y \in L$ (که الزاماً متمایز نیستند) انتخاب کرد به طوری که $x^+ \cap y^+ \neq \emptyset$ باشد؟

CMIMC 2019

پرسش ۱۲. الگوریتم گرافی زیر را در نظر بگیرید (V مجموعه رئوس و E مجموعه یال‌ها در گراف G است):

تابع $s(G)$:

۱. اگر $|V| = ۰$ باشد:

۱.۱. مقدار «درست» را برگردان.

۲. برای هر یال (u,v) در E:

۱.۲. گراف $H = G - u - v$ را بساز.

۲.۲. اگر $s(H)$ برابر «درست» باشد:

۱.۲.۲. مقدار «درست» را برگردان.

۳. مقدار «نادرست» را برگردان.

که در آن $G - u - v$ به معنای زیرگرافی از G است که فاقد رئوس u و v و تمامی یال‌های متصل به آن‌هاست. چند گراف G با مجموعه رئوس $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و دقیقاً ۶ یال وجود دارد که $s(G)$ برای آن‌ها درست (True) باشد؟

CMIMC 2019

پرسش ۱۳. ۱۵ شهر داریم و بین هر جفت از آن‌ها یک خط قطار وجود دارد که یا توسط شرکت ریلی کارنگی یا شرکت حمل‌ونقل ملون اداره می‌شود. توریستی می‌خواهد سه شهر را در یک مسیر بسته (loop) ملاقات کند، به‌طوری‌که تمام این مسیر با خطوط متعلق به «یک» شرکت باشد. حداقل تعداد این حلقه‌های ۳-شهری چقدر است؟

CMIMC 2019

پرسش ۱۴. میشل در گوشهٔ پایین-چپ یک شبکهٔ ۶×۶ در نقطهٔ $(۰,۰)$ قرار دارد. این شبکه دارای یک جفت دستگاه تله‌پورت در نقاط $(۲,۲)$ و $(۳,۳)$ است؛ اولین باری که میشل به یکی از این نقاط برسد، بلافاصله به نقطهٔ دیگر تله‌پورت می‌شود و دستگاه‌ها ناپدید می‌شوند. اگر او فقط بتواند با گام‌های واحد به سمت بالا یا راست حرکت کند، تعداد مسیرهایی که می‌تواند به نقطهٔ $(۵,۵)$ برسد را بیابید.

CMIMC 2018

پرسش ۱۵. در دانشگاه CMU، اتوبوس‌های خط A و B به‌ترتیب هر ۲۰ و ۱۸ دقیقه یک‌بار می‌آیند. کوین اتوبوس A را ترجیح می‌دهد اما نمی‌خواهد زیاد منتظر بماند، بنابراین یک استراتژی انتظار اتخاذ می‌کند: او سوار اولین اتوبوس A می‌شود که برسد، اما اگر ۵ دقیقه صبر کرد و نیامد، سوار اولین اتوبوسی می‌شود که از راه برسد (چه A باشد چه B). احتمال اینکه او در نهایت سوار اتوبوس A شود چقدر است؟

CMIMC 2018

پرسش ۱۶. ویکتور یک دسته کارت استاندارد ۵۴ کارتی (شامل ۵۲ کارت معمولی و ۲ کارت جوکر) را بُر می‌زند، سپس کارت‌ها را یکی‌یکی روی هم می‌چیند و بعد از ظاهر شدن اولین آس، متوقف می‌شود. با این حال، اگر در حین چیدن، «جوکر» ظاهر شود، کل دسته کارت‌های چیده شده (شامل همان جوکر) را دور می‌ریزد و از نو شروع می‌کند؛ برای مثال، اگر ترتیب کارت‌ها «۲-۳-جوکر-آس» باشد، دسته نهایی با ۱ کارت تمام می‌شود. تعداد مورد انتظار کارت‌ها در دسته نهایی را بیابید.

CMIMC 2018

پرسش ۱۷. ۹ لامپ متمایز در یک دایره چیده شده‌اند. هر لامپ می‌تواند روشن یا خاموش باشد. برای روشنایی مناسب اتاق، در هر گروه از چهار لامپ مجاور، حداقل یکی باید روشن باشد. چند پیکربندی مجاز برای این لامپ‌ها وجود دارد؟

CMIMC 2018

پرسش ۱۸. فرد و جورج بازی زیر را انجام می‌دهند. ابتدا $x = ۱$ است. در هر نوبت، یک عدد $r \in \{۳, ۵, ۸, ۹\}$ را با احتمال برابر انتخاب می‌کنند و x را در r ضرب می‌کنند. اگر $x + ۱$ مضرب ۱۳ باشد، فرد برنده می‌شود؛ اگر $x + ۳$ مضرب ۱۳ باشد، جورج برنده می‌شود؛ در غیر این صورت بازی ادامه پیدا می‌کند. احتمال اینکه فرد برنده شود را بیابید.

CMIMC 2018

پرسش ۱۹. تعداد جایگشت‌های $a_۱, a_۲, \ldots, a_{۲۰۱۸}$ از دنبالهٔ $۱, ۲, \ldots, ۲۰۱۸$ را بیابید به‌طوری‌که نامساوی $a_k > k$ دقیقاً برای یک مقدار از k برقرار باشد.

CMIMC 2018

پرسش ۲۰. زیرمجموعهٔ $S \subseteq \{۰, ۱, \ldots, ۱۴\}$ را «پراکنده» می‌نامیم اگر به ازای هر $x \in S$، مقدار $x + ۱$ به پیمانه‌ی ۱۵ در S نباشد. تعداد زیرمجموعه‌های پراکنده‌ای را بیابید که مجموع اعضای آن‌ها مضربی از ۱۵ باشد.

CMIMC 2018