



BmMT 2021-2025

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. (a, b, c, d, e) یک جایگشت از $(۲, ۳, ۴, ۵, ۶)$ است. به عنوان مثال یکی از جایگشت های ممکن $(a, b, c, d, e) = (۵, ۳, ۶, ۲, ۴)$ است. ما کسبیم مقدار ممکن $a - ab + abc - abcd + abcde$ وقتی که $ab, abc, abcd$ و $abcde$ همه نشان دهنده ضرب هستند (به عنوان مثال $ab = a \cdot b$) و نه جایگشت چند است؟

BmMT individual 2025

پرسش ۲. یک زنبور (که با X نشان می‌دهیم) را در یک کندو مستطیلی که به شکل زیر دیده می‌شود در نظر بگیرید.

	1	2	3	4	5	6	7
A				X			
B							
C							
D							

در یک حرکت، زنبور می‌تواند با حرکت به بالا، پایین، چپ یا راست به مربعی مجاور برود و هرگاه به سطر D برسد دیگر نمی‌تواند حرکت کند. این زنبور نمی‌تواند به بیرون کندو حرکت کند. او نمی‌تواند دوباره وارد مربعی شود که قبلاً در آن بوده است. ، همچنین نمی‌تواند بیش از ۶ بار حرکت کند. تعداد مسیرهای متفاوتی که زنبور می‌تواند از نقطه شروعش تا سطر D طی کند را بیابید.

BmMT team 2025

پرسش ۳. به عدد n پایه‌ای می‌گوییم اگر عدد صحیح مثبت $b > 1$ وجود داشته باشد به طوری که بتوان n را در مبنای b با b رقم نوشت (بدون اینکه اولین رقم سمت چپش ۰ باشد). به عنوان مثال، ۳ پایه‌ای است زیرا که می‌توان آن را با ۲ رقم در مبنای ۲ به صورت 11_2 نوشت. چند عدد مثبت صحیح $n \leq 2025$ پایه‌ای هستند؟

BmMT team 2025

پرسش ۴. یک جایگشت از مجموعه‌ای از n عدد چینشی با ترتیبی خاص از اعضای آن است. به عنوان مثال، جایگشت‌های لیست $(1, 2, 3)$ شامل $(1, 3, 2)$ و $(3, 2, 1)$ هستند. به جایگشت $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ شامل همه اعداد صحیح مثبت ۱ تا n کاتاماری است اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ نامساوی $a_i < 2 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{i-1}$ برقرار باشد. به عنوان مثال جایگشت $(1, 2, 3, 4, 5, 7, 6)$ کاتاماری است ولی $(3, 2, 1, 4, 5)$ کاتاماری نیست. تعداد جایگشت‌های $(1, 2, 3, \dots, 9)$ که کاتاماری هستند را پیدا کنید.

BmMT individual 2024

پرسش ۵. شریاس دارد بازی می‌کند. او با ۲ تپله در کلکسیونش شروع می‌کند. سپس در مرحله n ام بازی، او یک سکه سالم را پرتاب می‌کند و اگر شیر بیاید او 2^n تپله به کلکسیونش اضافه می‌کند. بازی زمانی تمام می‌شود که تعداد تپله‌های کلکسیونش بر ۳ یا ۵ بخش پذیر بشود. احتمال این که تعداد تپله‌های کلکسیون او در پایان بازی بر ۵ بخش پذیر باشد چقدر است؟

BmMT team 2024

پرسش ۶. ۵ نفر، آلیس، بنجی، کارل، دنيله، و اريكا يك كيف با ۶ آبنبات را دست به دست مي‌چرخانند. در ابتدا آليس كيف را دارد و از آن يك آبنبات بر مي‌دارد. سپس او به طور كاملا تصادفي كيف و آبنبات هاي باقي مانده را به يكي از ۴ نفر ديگر مي‌دهد. آن فرد يك آبنبات از كيف بر مي‌دارد و سپس كيف و باقي مانده آبنبات ها را به طور كاملا تصادفي به يك نفر از ۴ نفر ديگر مي‌دهد. اين كار تا جايي ادامه مي‌يابد كه ديگر هيچ آبنباتي در كيف باقي نماند. احتمال آن كه هر نفر آبنباتي از كيف بردارد چقدر است؟

BmMT team 2024

پرسش ۷. هشت صندلي دور يك ميز دايره‌اي قرار گرفته‌اند. بين اين صندلي ها، دوتا قرمز، دوتا آبي، دوتا سبز، و دوتا زرد هستند. صندلي هاي هم‌رنگ يكسانند. اگر چرخش ها و انعكاس هاي چينش هاي صندلي ها متمايز در نظر گرفته شوند، چند چينش از صندلي ها چنين خاصيتي دارد كه هر جفت صندلي مجاوري رنگ متمايزي دارند؟

BmMT team 2023

پرسش ۸. دنباله صعودي‌اي از اعداد صحيح مثبت سه‌رقمي خواص زير را دارد.

■ هر عدد مضرب ۲، ۳ يا ۵ است.

■ اعداد مجاور تنها در يك رقم تفاوت دارند و نسبت به هم اولند. (توجه كنيد اعداد صحيح

مثبت x و y نسبت به هم اولند اگر هيچ شمارنده‌ي مشتركی جز ۱ نداشته باشند.)

ماكسيم طول ممكن اين دنباله چند است؟

BmMT team 2023

پرسش ۹. سومیت شمارنده های ۱۲ را روی یک خط به ترتیب صعودی به صورت ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ می‌نویسد. لوک از آنجا که آدم موزی هست یک جایگشت از آن شمارنده های نویسد و به صورت دقیقاً زیر نوشته سومیت میگذارد. لوک

$$\gcd(a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, 6a_5, 12a_6)$$

را محاسبه می‌کند. می‌دانیم نتیجه لوک بزرگتر از ۱ است، چند جایگشت مختلف ممکن است نوشته شده باشند؟

BmMT individual 2022

پرسش ۱۰. تعداد راه های رنگ آمیزی ارقام ۹ و ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ با رنگ های قرمز، آبی یا سبز را به طوری که

• الف) هر عدد صحیح اول حداقل یک رقم داشته باشد که آبی نباشد.

• ب) هر عدد صحیح مرکب حداقل یک رقم داشته باشد که سبز نیست.

توجه کنید • مرکب نیست. به عنوان مثال، چون ۱۲ مرکب است یا رقم ۱ یا رقم ۲ یا جفتشان نباید سبز باشند.

BmMT team 2022

پرسش ۱۱. به زوج مرتب (a, b) مربوط می‌گوییم اگر x و y اعداد صحیح مثبتی باشند به طوری که x, y را می‌شمارد، y ۳۶۰۰ را می‌شمارد و $\frac{y}{x}$ یک عدد اول است. برای هر دو زوج مرتب **مربوط** لین قدرمطلق تفاضل دو مولفه این جفت را یادداشت می‌کند. جمع اعدادی که او یادداشت کرده چند است؟

BmMT team 2022

پرسش ۱۲. به چند روش می‌توان مربع های واحد یک جدول 5×3 را با ارقام ۳ و ۲ و ۱ پر کرد به طوری که هر دو مربع مجاور ضلعی دقیقاً ۱ واحد تفاوت داشته باشند؟

BmMT team 2022

پرسش ۱۳. یک اکتاهدرون (یک شکل سه بعدی هشت وجهی، با ۸ مثلث متساوی الاضلاع) منتظم طول ضلع ۲ دارد. یک مورچه از مرکز یکی از وجه ها شروع می کند و روی سطح این اکتاهدرون به مقصد مرکز وجه روبرو با کوتاه ترین مسیر ممکن راه می رود. مربع طول مسیری که مورچه طی کرده را می توان به صورت $\frac{m}{n}$ نشان داد که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند که نسبت به هم اولند. $m + n$ را محاسبه کنید.

BmMT individual 2021

پرسش ۱۴. به عددی صحیح و مثبت **باینری-اوکی** گفته می شود اگر حداقل نیمی از ارقام آن در نمایش باینری (مبنای ۲) ۱ باشند، اما هیچ دو ای متوالی نباشند. به عنوان مثال، $۱۰۱۰ = ۱۰۱۰۲$ و $۱۰۱۰۱ = ۱۰۱۰۲$ هر دو باینری-اوکی هستند، اما $۱۰۰۰۰۰۲ = ۱۶۱۰$ و $۱۰۱۱۲ = ۱۱۱۰$ نیستند. تعداد اعداد صحیح مثبت کمتر یا مساوی ۲۰۲۰ (در مبنای ۱۰) که باینری-اوکی هستند را محاسبه کنید.

BmMT individual 2021

پرسش ۱۵. لین و جینگ جینگ روی صفحه xy راه می روند. در یک گام، لین می تواند از هر نقطه (x, y) به $(x + 1, y)$ یا $(x, y + 1)$ برود. و جینگ جینگ می تواند از (x, y) به $(x - 2, y + 5)$ یا $(x + 3, y - 1)$ برود. تعداد راه هایی که لین می تواند از $(0, 0)$ به $(20, 20)$ برود برابر تعداد راه هایی است که جینگ جینگ می تواند از $(0, 0)$ به (a, b) برود که a و b اعداد صحیح مثبت هستند. مینیمم مقدار ممکن $a + b$ را محاسبه کنید.

BmMT team 2021

پرسش ۱۶. نیکو سه خانه مربعی متمایز A ، B و C را از یک جدول ۶×۲ به طوری کاملا تصادفی انتخاب کرده. احتمال آن که مربع C درون مستطیلی باشد که گوشه های روبرویش A و B هستند باشد چقدر است؟ مثال مستطیل هایی به گوشه های روبروی A و B با نواحی سایه خورده در پایین نشان داده شده اند.

A					
					B

	B	A			

پرسش ۱۷. دنباله a_1, a_2, \dots, a_n **ضد-متوالی** نامیده می‌شود اگر $2024 \leq a_1 \leq -2024$ و برای همه $1 \leq i \leq n-1$ داشته باشیم $a_i + a_{i+1} = i$. بین همه دنباله های ضد-متوالی به طول ۵۰۱، مجموع تمام مقادیر ممکن a_{501} را که بر ۳ بخش پذیر باشد را محاسبه کنید.

BmMT individual 2024

پرسش ۱۸. جاناتان ۴۶ توپ همسان آبی، ۳ توپ همسان قرمز، و یک توپ سبز در یک مخزن دارد. او به طور پیاپی و بدون جایگزاری از مخزن توپ بر می‌دارد تا وقتی که توپ سبز را بردارد. به عنوان مثال جاناتان ممکن است یک توپ قرمز بردارد، سپس دو توپ آبی بردارد، یک توپ قرمز و بعد توپ سبز را بردارد که فرآیند را تکمیل می‌کند. تعداد دنباله های برداشتن متمایزی که با این شرایط ممکن هستند را محاسبه کنید.

BmMT individual 2024

پرسش ۱۹. توشار ۳ تاس سالم ۲۰ وجهی دارد، D_1, D_2 و D_3 . وجوه تاس D_1 شامل همه اعداد صحیح ۱ تا ۲۰ هستند. وجوه تاس D_2 شامل تمام اعداد صحیح زوج از ۲ تا ۴۰ هستند. و وجوه تاس D_3 شامل تمامی مضارب ۳ از ۳ تا ۶۰ هستند. توشار به طور تصادفی یکی از ۳ تاس را از کیف بیرون آورده و ۳ بار پرتاب می‌کند. اگر مجموع اعدادی که در ۳ پرتاب توشار ظاهر می‌شوند ۳۰ باشد، احتمال اینکه تاس بیرون آورده از کیف D_1 باشد چند است؟

BmMT team 2024

پرسش ۲۰. آنکیت و ریچارد در حال بازی کردن هستند. آنکیت مرتباً ارقام ۲، ۰، ۲، ۳ را به همین ترتیب از چپ به راست روی تخته می‌نویسد تا زمانی که ریچارد به او بگوید که توقف کند. اگر عدد حاصل از کنار هم گذاشتن ارقام در مبنای ۱۰ بر بیشترین تعداد ممکن از اعداد صحیح مثبت کمتر مساوی ۱۲ بخش پذیر باشد ریچارد می‌برد. به عنوان مثال، اگر ریچارد بعد از نوشته شدن ۷ رقم آنکیت را متوقف کند عدد حاصل ۲۰۲۳۲۰۲ خواهد بود که بر ۱ و ۲ بخش پذیر است. ریچارد می‌خواهد در زودترین زمان ممکن بازی را ببرد. فرض کنید آنکیت باید حداقل ۱ رقم را بنویسد، بعد از چند رقم ریچارد باید آنکیت را متوقف کند؟

