AMC12 2021-2025

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. آونیک مرتباً یک بازی را انجام می‌دهد که احتمال برد $\frac{۱}{۳}$ دارد. نتایج بازی ها مستقل هستند. امید ریاضی تعداد بازی هایی که او باید انجام دهد تا هر دوی برد و باخت را حداقل یک بار داشته باشد را بیابید.

AMC12 B 2025

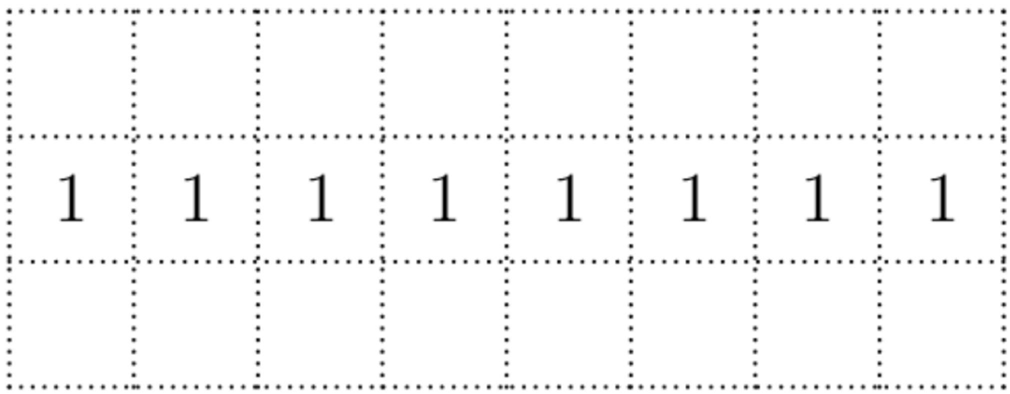
پرسش ۲. هر یک از ۹ خانه جدول ۳ × ۳ باید به رنگ قرمز، آبی یا زرد بشوند به طوری که هر خانه قرمز حداقل یک ضلع مشترک با خانه ای آبی داشته باشد، هر خانه آبی حداقل یک ضلع مشترک با خانه ای زرد داشته باشد و هر خانه زرد حداقل یک ضلع مشترک با یک خانه قرمز داشته باشد. رنگ آمیزیی هایی که می‌توان آن ها را با چرخش یا بازتاب یکدیگر بدست آورد یکسان محسوب می‌شوند. چند رنگ آمیزی متمایز ممکن است؟

AMC12 B 2025

پرسش ۳. به عددی صحیح مثبتی **عادلانه** می‌گوییم که هیچ رقمی بیش از یک بار در آن استفاده نشده باشد، ۰ نداشته باشد و هیچ رقمی مجاور دو رقم بزرگتر نباشد. به عنوان مثال ۱۹۶، ۲۳ و ۱۲۴۶۳ عادلانه هستند، ولی ۳۴۳۲۱ و ۳۲۰، ۱۵۴۶ نیستند. چند عدد صحیح مثبت عادلانه داریم؟

AMC12 A 2025

پرسش ۴. شکل زیر یک جدول نقطه چین به پهنای ۸ خانه و بلندای ۳ خانه را نشان می‌دهد که از مربع های ۱ اینچ در ۱ اینچ تشکیل شده. کارل خلال دندان هایی با طول ۱ اینچ روی برخی از اضلاع مربع ها می‌گذارد که یک حلقه بسته ای که خودش را قطع نمی‌کند بسازد. اعداد داخل مربع ها تعداد اضلاع آن مربع را نشان میدهد که باید روی آن ها خلال دندان قرار بگیرد و اگر عددی نوشته نشده هر تعداد خلال دندانی روی اضلاع آن مربع مجاز است. کارل به چند طریق می‌تواند خلال دندان ها را قرار دهد؟



AMC10 A 2024

پرسش ۵. پابلو ۶ توپ سفید همسان را با رنگ آبی یا قرمز و الگوی نقطه ای یا راه راه تزئین می‌کند. او برای هر ۱۲ تصمیمی که باید بگیرد در مورد رنگ و الگوی هر توپ با پرتاب یک سکه سالم تصمیم گیری می‌کند. بعد از خشک شدن رنگ ها او ۶ توپ را در یک کوزه می‌گذارد. فریدا به طور تصادفی یک توپ از کوزه بر می‌دارد و رنگ و الگویش را یادداشت می‌کند. دو پیشامد ”توپ انتخابی فریدا قرمز است” و ”توپ انتخابی فریدا راه راه است” بسته به نتایج پرتاب سکه های پابلو ممکن است مستقل باشند یا نباشند. احتمال این که این دو پیشامد مستقل باشند را می‌توان به صورت $\frac{m}{n}$ نوشت، که m و n اعداد صحیح مثبتی هستند که نسبت به هم اولند. m چند است؟ (به یاد داشته باشید که دو پیشامد A و B مستقل هستند اگر $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$)

AMC12 B 2024

پرسش ۶. اعداد فیبوناچی به صورت $F_۱ = ۱, F_۲ = ۱$ و برای $n >= ۳$ $F_n = F_{n-۱} + F_{n-۲}$ تعریف می‌شوند.

$$\frac{F_۲}{F_۱} + \frac{F_۴}{F_۲} + \frac{F_۶}{F_۳} + ... + \frac{F_{۲۰}}{F_{۱۰}}$$

را بیابید.

AMC10 B 2024

پرسش ۷. ردیف های ۵ و ۴ ،۳ ، ۲ ،۱ یک آرایه مثلثی در زیر نشان داده شده است.

۱

۱ ۱

۱ ۳ ۱

۱ ۵ ۵ ۱

۱ ۷ ۱۱ ۷ ۱

هر ردیف بعد از ردیف اول به این صورت تشکیل شده که یک ۱ در سر و ته آن گذاشته شده و هر یک از اعداد میانی آن یکی بیشتر از حاصل جمع دو عددی هستند که به طور قطری بالای آن ها در ردیف قبلی هستند. یکان جمع ۲۰۲۳ عددی که در ردیف ۲۰۲۳ ام هستند چند است؟

AMC12 A 2023

پرسش ۸. فلورا قورباغه از عدد ۰ روی محور اعداد شروع می‌کند و به طور متوالی به سمت راست می‌پرد. در هر پرشی، به طور مستقل از پرش های قبلی، طول پرش فلورا به احتمال $\frac{۱}{۲^n}$ برابر n است. احتمال آن که فلورا روی ۱۰ فرود بیاید چقدر است؟

AMC12 A 2023

پرسش ۹. چند رشته به طول ۵ که از ارقام ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ تشکیل شده اند وجود دارند به طوری که برای هر $j \in \{1,2,3,4\}$، حداقل j تا از ارقام کمتر از j باشند؟ (به عنوان مثال، ۰۲۲۱۴ در شرایط صدق می‌کند زیرا آن حداقل ۱ رقم کمتر از ۱، حداقل ۲ رقم کمتر از ۲، حداقل ۳ رقم کمتر از ۳، و حداقل ۴ رقم کمتر از ۴ دارد. رشته ۲۳۴۰۴ در شرایط صدق نمی‌کند زیرا که حداقل ۲ رقم کمتر از ۲ ندارد.)

AMC10 A 2022

پرسش ۱۰. فرض کنید ۱۳ کارت با شماره های ۱، ۲، ۳،...، ۱۳ در یک ردیف چیده شده اند. ماموریت برداشتن آن ها به ترتیب صعودی است، با این شرط که مرتبا از چپ شروع کنیم و به راست برویم. در مثال زیر،کارت های ۱، ۲، ۳ در گذر اول برداشته می‌شوند، ۴ و ۵ در گذر دوم، ۶ در گذر سوم، ۷، ۸، ۹، ۱۰ در گذر چهارم، و ۱۱، ۱۲، ۱۳ در گذر پنجم. در چند حالت از ۱۳! حالت ممکن از ترتیب کارت ها، ۱۳ کارت در دقیقا دو گذر برداشته می‌شوند؟

$$\boxed{7}\ \boxed{11}\ \boxed{8}\ \boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{9}\ \boxed{12}\ \boxed{1}\ \boxed{13}\ \boxed{10}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$$

AMC10 A 2022

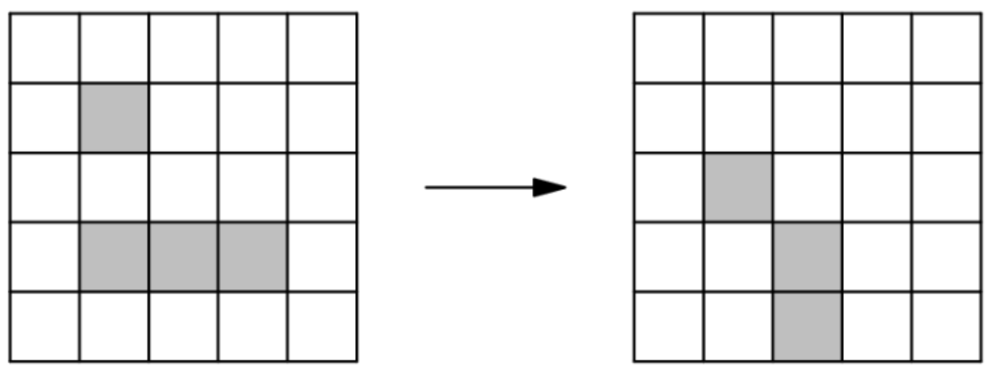
پرسش ۱۱. آمیلیا روی محور اعداد از ۰ شروع می‌کند و با پروسه ای که گفته می‌شود راه می‌رود. برای $n = 1,2,3$، آمیلیا مدت زمان t_n و طول x_n را کاملاً تصادفی و مستقلاً از بازه $(0,1)$ انتخاب می‌کند. در حرکت nام از پروسه، آمیلیا x_n واحد در جهت مثبت، در طول t_n دقیقه حرکت می‌کند. اگر در حرکت nام کل زمان سپری شده از ۱ دقیقه بگذرد، او در پایان این حرکت متوقف می‌شود. در غیر این صورت حرکت بعدی را انجام می‌دهد. در کل حداکثر ۳ حرکت انجام می‌دهد. احتمال آن که آمیلیا وقتی متوقف می‌شود جلوتر از ۱ باشد چقدر است؟

AMC10 B 2022

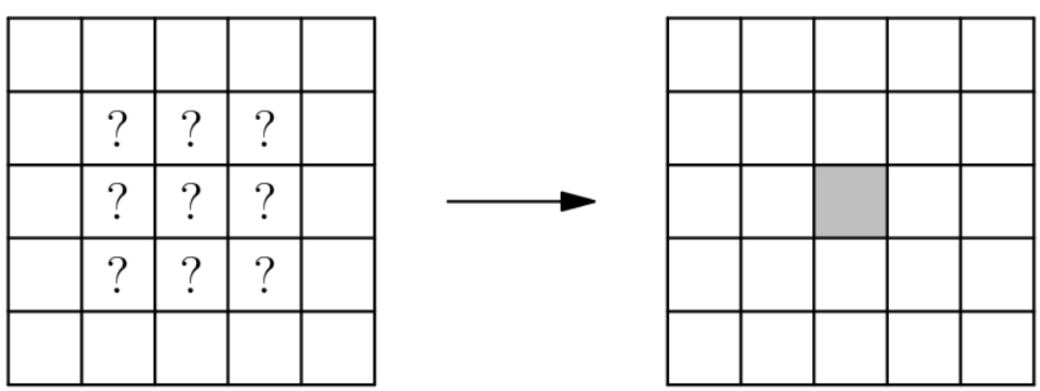
پرسش ۱۲. هر مربع در یک جدول ۵×۵ یا پر است یا خالی، و منظور از دو مربع همسایه، مربع هایی هستند که ضلع یا گوشه مشترک دارند. پس هر مربع حداکثر ۸ مربع همسایه دارد. جدول با قوانین زیر تغییر می‌کند.

- هر مربع پری که ۲ یا ۳ همسایه پر دارد پر می‌ماند.
- هر مربع خالی‌ای که دقیقا ۳ همسایه پر دارد پر می‌شود.
- همه مربع های دیگر خالی می‌مانند یا خالی می‌شوند.

مثالی از تغییر در شکل زیر نشان داده شده.



فرض کنید جدول ۵×۵ مرزی از مربع های خالی دارد که یک زیرجدول ۳×۳ را احاطه می‌کنند. چند آرایش اولیه بعد از یک مرحله تغییر تبدیل به جدولی با تک مربع پر در مرکزش می‌شوند؟ (چرخش ها و بازتاب های یک آرایش را متمایز در نظر می‌گیریم.)



پرسش ۱۳. چند آرایه دو بعدی ۴×۴ که درایه هایش ۰ و ۱ هستند وجود دارد به طوری که مجموع سطر ها (مجموع درایه ها در هر سطر) به ترتیبی دلخواه ۴ و ۳ ،۲ ،۱ باشند و مجموع ستون ها (مجموع درایه های هر ستون) هم به ترتیبی دلخواه ۴ و ۳ ،۲ ،۱ باشند؟ به عنوان مثال، آرایه

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

شرایط را دارد.

AMC12 B 2022

پرسش ۱۴. آذر و کارل XO بازی می‌کنند. آذر یک X در یکی از خانه های جدولی ۳×۳ می‌گذارد، سپس کارل یک O در یکی از خانه های باقی مانده می‌گذارد. بعد از آن، آذر یک X در یکی از خانه های باقی مانده می‌گذارد، و همینطور ادامه می‌یابد تا ۹ خانه پر شوند یا ۳ تا از سمبل های یکی از دو بازیکن در یک ردیف عمودی یا افقی یا قطری باشند-هرکدام که اول اتفاق افتد، که در این حالت آن بازیکن می‌برد. فرض کنید بازیکنان حرکت هایشان را به جای این که تلاش کنند با استراتژی منطقی‌ای انجام دهند به طور کاملا تصادفی انجام می‌دهند، و کارل وقتی سومین Oاش را می‌گذارد می‌برد. صفحه بعد از اتمام بازی به چند حالت می‌توانند دیده شود؟

AMC12 A 2025

پرسش ۱۵. میانگین تعداد جفت های اعداد صحیح متوالی در زیرمجموعه ای ۵ عضوی که کاملا تصادفی از مجموعه {۳۰ ،...،۳ ،۲ ،۱} انتخاب شده چند است؟ (مثلا مجموعه {۳۰ ،۱۹ ،۱۸ ،۱۷ ،۱} دو جفت عدد صحیح متوالی دارد.)

AMC12 B 2021-Fall

پرسش ۱۶. یک مکعب از ۴ مکعب واحد سفید و ۴ مکعب واحد آبی ساخته شده. چند روش متفاوت برای ساخت مکعبی $۲ \times ۲ \times ۲$ با چنین مکعب های کوچکتری وجود دارد؟ (دو ساخت یکسان درنظر گرفته می‌شوند اگر بتوان یکی را با چرخاندن تبدیل به دیگری کرد.)

AMC12 B 2021-Fall

پرسش ۱۷. یک حشره روی یک راس از شبکه‌ی نامتناهی‌ای از مثلث های متساوی الاضلاع به ضلع ۱ قرار دارد. در هر مرحله حشره روی خطوط شبکه در یکی از ۶ جهت ممکن به طور کاملاً تصادفی و مستقلاً از دیگر حرکات با احتمال برابر حرکت می‌کند. احتمال آن که بعد از ۵ حرکت حشره هرگز بیش از ۱ واحد دور از نقطه شروعش نشده باشد چقدر است؟

AMC12 B 2021-Fall

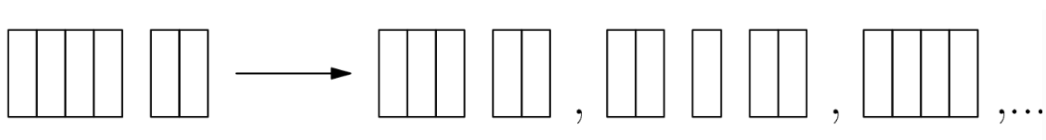
پرسش ۱۸. فریدا قورباغه دنباله ای از پرش های یک خانه ای را روی یک جدول ۳×۳ شروع می‌کند و به طور تصادفی جهت-بالا،پایین، چپ، یا راست را در هر پرش انتخاب می‌کند. او به طور قطری نمی‌پرد. اگر جهت پرش موجب بیرون رفتن فریدا از جدول باشد، او می‌پیچد و به لبه مقابل می‌پرد. به عنوان مثال اگر فریدا از خانه مرکزی شروع کند و دو پرش به جهت بالا انجام دهد، پرش اول او را در ردیف بالا خانه وسط قرار می‌دهد، و پرش دوم باعث می‌شود فریدا به لبه مقابل بپرد، و در ردیف پایین خانه وسط فرود بیاید. فرض کنید فریدا از خانه مرکزی شروع می‌کند، حداکثر ۴ پرش به طور تصادفی انجام می‌دهد، و اگر در خانه مرکزی فرود آید پریدن را متوقف می‌کند. احتمال آن که او در یکی از ۴ پرش، به یکی از مربع‌های گوشه‌ی جدول برسد چقدر است؟

AMC12 A 2021

پرسش ۱۹. ۳ توپ به طور تصادفی و مستقل از هم درون صندوق هایی که با اعداد صحیح مثبت شماره گذاری شدند پرتاب می‌شوند، به طوری که برای هر توپ احتمال آن که این توپ درون صندوق i برای $i = ۱, ۲, ۳, \ldots$ پرتاب شود برابر ۲^{-i} است. قرار گرفتن بیش از یک توپ در یک صندوق مجاز است. احتمال آن که توپ ها با فواصل برابر در صندوق های متمایز قرار گیرند برابر $\frac{p}{q}$ است که در آن p و q اعداد صحیح مثبتی هستند که نسبت به هم اولند. (به عنوان مثال، توپ ها با فواصل برابر قرار گرفته اند اگر آن ها به صندوق های ۳، ۱۷ و ۱۰ پرتاب شوند.) $p + q$ چند است؟

AMC12 B 2021

پرسش ۲۰. آرجون و بث بازیی انجام می‌دهند که آن ها در حرکاتشان یک یا دو آجر متوالی را از یک دیوار از مجموعه دیوار های آجری حذف می‌کنند، که ممکن است فاصله موجب ایجاد دیوار های جدید شود. طول دیوار ها یک آجر است. به عنوان مثال، مجموعه ای از دیوار ها با اندازه های ۴ و ۲ میتوانند به هر یک از حالت های مقابل با یک حرکت تبدیل شوند: (۲، ۳)، (۲، ۱، ۲)، (۴)، (۴، ۱)، (۲، ۲)، یا (۱، ۱، ۲).



آرجون اول بازی می‌کند، بازیکنی که آخرین آجر را حذف کند برنده خواهد شد. برای کدام حالت اولیه، استراتژی‌ای وجود دارد که برد را برای بث تضمین می‌کند؟

الف) (۶، ۱، ۱) ب) (۶، ۲، ۱) پ) (۶، ۲، ۲) د) (۶، ۳، ۱) ه) (۶، ۳، ۲)

AMC12 B 2021