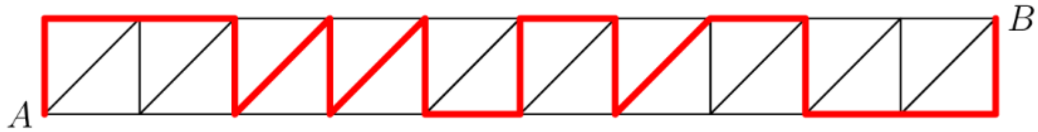
AIME 2020-2026

- مدت زمان آزمون ۳٫۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. شکل زیر جدولی شامل ۱۰ مربع در یک سطر را نشان میدهد. هر مربع قطری دارد که گوشه پایین-چپ آن را به گوشه بالا-راست آن متصل میکند. حشره‌ای روی پاره خط های بین دو راس حرکت می‌کند به طوری که هیچ‌گاه یک پاره خط را دوبار پیمایش نمیکند و همچنین هیچ‌گاه از راست به چپ نمیرود (چه با حرکت بر روی قطر و چه با حرکت بر اضلاع مربع ها). فرض کنید N تعداد مسیر هایی باشد که حشره میتواند روی آن ها از گوشه پایین-چپ (A) به گوشه بالا-راست (B) برود. یک چنین مسیری از (A) به (B) با خط قرمز نشان داده شده. $\sqrt{N}$ را بیابید.



2026 AIME II

پرسش ۲. یک تاس سالم ۶-وجهی را مرتباً پرتاب می‌کنیم. هر بار که ۱ یا ۲ بیاید آلیس یک سکه می‌گیرد؛ هر بار که ۳ یا ۴ بیاید باب یک سکه می‌گیرد و هر بار که ۵ یا ۶ بیاید کارول یک سکه می‌گیرد. احتمال آن که هر دوی آلیس و باب قبل از این که کارول سکه ای بگیرد، حداقل ۲ سکه بگیرند را می‌توان به صورت $\frac{m}{n}$ نوشت، به طوری که n و m دو عدد صحیح مثبت باشند که نسبت به هم اول هستند. ۱۰۰$m+n$ را بیابید.

2026 AIME II

پرسش ۳. دو مجموعه متناهی S و T از اعداد صحیح را **پسرخاله** می‌نامیم اگر

- S و T تعداد اعضای برابری داشته باشند.
- S و T مجزا باشند.
- بتوان اعضای S را با اعضای T جفت کرد به طوری که تفاضل دو عضو هر جفت دقیقاً برابر ۱ باشد.

به عنوان مثال، {۵، ۲، ۱} و {۴، ۳، ۰} پسرخاله هستند. فرض کنید S دقیقا ۴۰۴۰ پسرخاله دارد. حداقل تعداد اعضایی که S میتواند داشته باشد را بیابید.

2026 AIME II

پرسش ۴. اعداد ۱ تا ۶۴ به ترتیبی دلخواه در جدولی ۸ × ۸ چیده شده اند به طوری که در هر خانه یک عدد قرار گرفته. عددی که در سطر i و ستون j قرار گرفته را $a_{i,j}$ می‌نامیم، و مجموع تفاضل های خانه های مجاور را M می‌نامیم. یعنی:

$$M = \sum_{i=۱}^{۸} \sum_{j=۱}^{۷} (|a_{i,j+۱} - a_{i,j})| + |a_{j+۱,i} - a_{j,i}|)$$

باقیمانده تقسیم ماکسیمم مقدار M را بر ۱۰۰۰ پیدا کنید.

2026 AIME I

پرسش ۵. ۴۰۳۲۰ = !۸ عدد صحیح هشت رقمی مثبت وجود دارند که هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ را دقیقا یک بار استفاده کرده اند. از این اعداد تعداد آن هایی که به ۲۲ بخش پذیر هستند را N بگیرید. تفاضل N و ۲۰۲۵ را پیدا کنید.

2025 AIME I

پرسش ۶. ۲۷ خانه یک جدول ۹ $\times$ ۳ با اعداد ۱ تا ۹ پر شده اند به طوری که هر سطر دارای ۹ عدد متمایز است و هر بلوک ۳ $\times$ ۳ای که در شکل زیر با خطوط پر رنگ مشخص شده هم دارای ۹ عدد متمایز است. همانند سه سطر اول یک پازل سودوکو.

4	2	8	9	6	3	1	7	5
3	7	9	5	2	1	6	8	4
5	6	1	8	4	7	9	2	3

تعداد حالت های متمایزی که میتوان چنین جدولی را پر کرد را میتوان به صورت $p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdot s^d$ نوشت که در آن p، q، r و s اعداد اول متمایزند و a، b، c، d اعداد صحیح مثبتند. $p \cdot a + q \cdot b + r \cdot c + s \cdot d$ را بیابید.

2025 AIME I

پرسش ۷. مجموعه شمارنده های صحیح مثبت ۲۰۲۵ را A بنامید. از بین زیر مجموعه های A یکی را به تصادف انتخاب کرده و B بنامید. احتمال این که B مجموعه ای ناتهی باشد که کوچکترین مضرب مشترک (lcm) اعضایش ۲۰۲۵ است را میتوان به صورت $\frac{m}{n}$ نشان داد که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند که نسبت به هم اولند. $m + n$ را بیابید.

2025 AIME II

پرسش ۸. جن در یک بخت آزمایی شرکت کرده که در آن ۴ عدد متمایز از مجموعه $S = \{۱, ۲, ۳, ..., ۹, ۱۰\}$ انتخاب می‌کند. سپس به طور تصادفی ۴ عدد از S انتخاب میشوند. او جایزه ای می‌برد اگر حداقل دوتا از اعداد انتخابیش در بین اعدادی که به طور اتفاقی انتخاب شده اند ظاهر شوند، و جایزه بزرگ را می‌برد اگر هر ۴ عدد انتخابیش دقیقا اعدادی باشند که به تصادف انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه او جایزه بزرگ را ببرد اگر بدانیم جایزه برده است را میتوان به صورت $\frac{m}{n}$ نشان داد که در آن n و m اعداد صحیح مثبتی هستند که نسبت به هم اولند. $n + m$ را بیابید.

2024 AIME I

پرسش ۹. تعداد راه های قرار دادن یک رقم را در هر خانه از جدولی ۲×۳ را بیابید که جمع دو عددی که با خواندن هر سطر از چپ به راست حاصل می‌شوند ۹۹۹ بشود و مجموع ۳ عددی که با خواندن هر ستون از بالا به پایین حاصل می‌شوند ۹۹ باشد. جدول زیر یک حالت قرار دهی ارقام است زیرا که $۸ + ۹۹۱ = ۹۹۹$ و $۹ + ۹ + ۸۱ = ۹۹$

0	0	8
9	9	1

2024 AIME II

پرسش ۱۰. ۲۵ مهره سفید همسان و ۲۵ مهره سیاه همسان داریم. تعداد راه های قرار دادن برخی از این مهره ها را در ۲۵ خانه جدولی ۵×۵ را بیابید به طوری که

- در هر خانه حداکثر ۱ مهره قرار گیرد.
- همه مهره های هم سطر همرنگ باشند و همه مهره های هم ستون هم همرنگ باشند.
- هیچ مهره‌ی دیگری را نتوان اضافه کرد به طوری که هر دو شرط بالا صادق بمانند.

2024 AIME II

پرسش ۱۱. پنج مرد و نه زن به ترتیبی تصادفی دور یک دایره با فواصل برابر ایستاده‌اند. احتمال این که هر مرد به طور قطری روبروی یک زن باشد $\frac{m}{n}$ است که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند که نسبت به هم اولند. $n + m$ را بیابید.

2024 AIME I

پرسش ۱۲. آلیس می‌داند که در هر لحظه یک کارت از ۳ کارت قرمز و ۳ کارت سیاه با ترتیبی تصادفی به او نشان داده خواهد شد. قبل از این که هر کارت نشان داده شود آلیس باید رنگ آن را حدس بزند. اگر آلیس بهینه بازی کند امید ریاضی حدس های درست او $\frac{m}{n}$ است، که n و m دو عدد صحیح مثبت هستند که نسبت به هم اولند. $m + n$ را بیابید.

2023 AIME I

پرسش ۱۳. تعداد زیرمجموعه های مجموعه {۱، ۲، ۳،...، ۱۰} را که دقیقا یک جفت عدد متوالی دارند را بیابید.

{۵، **۲**، **۱**} و {۱۰، **۷**، **۶**، ۳، ۱} مثال هایی از چنین زیرمجموعه ای هستند.

2023 AIME I

پرسش ۱۴. هر راس یک ۱۲-ضلعی منتظم را می‌خواهیم با رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، می‌دانیم چنین رنگ آمیزیی 2^{12} حالت دارد. تعداد رنگ آمیزی هایی را بیابید که هیچ ۴ راسی که با یک رنگ رنگ آمیزی شده‌اند راس های یک مستطیل نیستند.

2023 AIME II

پرسش ۱۵. تعداد راه های قرار دادن اعداد ۱ تا ۱۲ در ۱۲ خانه یک جدول 2×6 به طوری که برای هر دو خانه مجاور ضلعی تفاضل عددشان بر ۳ بخش پذیر نباشد را N بنامید. یک چنین جدولی در شکل زیر نمایش داده شده. تعداد شمارنده های مثبت N را بیابید.

1	3	5	7	9	11
2	4	6	8	10	12

2023 AIME II

پرسش ۱۶. الینا ۱۲ بلوک دارد، از هر یک از رنگ های قرمز (R)، آبی (B)، زرد (Y)، سبز (G)، نارنجی (O)، و بنفش (P) دوتا. یک چینش از بلوک ها را **زوج** گوییم اگر بین هر جفت بلوکی از یک رنگ تعداد زوجی بلوک باشد. به عنوان مثال چینش

R B B Y G G Y R O P P O

زوج است. الینا بلوک هایش را با ترتیبی تصادفی در یک ردیف می‌چیند. احتمال این که چینش او **زوج** باشد $\frac{m}{n}$ است که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند که نسبت به هم اولند. $m+n$ را بیابید.

2022 AIME I

پرسش ۱۷. به ازای هر مجموعه متناهی X تعداد اعضای آن را با $|X|$ نشان می‌دهیم. تعریف می‌کنیم $S_n = \sum |A \cap B|$ که سیگما روی تمام زوج مرتب های (A, B) هست که A و B دو زیر مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ..., n\}$ هستند به طوری که $|A| = |B|$ است. به عنوان مثال، $S_۲ = ۴$ زیرا که مجموع روی جفت زیرمجموعه های

$$(A, B) \in \{(\emptyset, \emptyset), (\{۱\}, \{۱\}), (\{۱\}, \{۲\}), (\{۲\}, \{۱\}), (\{۲\}, \{۲\}), (\{۱, ۲\}, \{۱, ۲\})\}$$

است. که می‌دهد $S_۲ = ۰ + ۱ + ۰ + ۰ + ۱ + ۲ = ۴$.

$\frac{S_{۲۰۲۲}}{S_{۲۰۲۱}}$ را می‌توان به صورت $\frac{p}{q}$ نشان داد به طوری که p و q اعداد صحیح مثبتی باشند که نسبت به هم اولند. باقیمانده تقسیم $p + q$ بر ۱۰۰۰ را بیابید.

2022 AIME I

پرسش ۱۸. اعداد حقیقی $x_۱ \leq x_۲ \leq ... \leq x_{۱۰۰}$ را درنظر بگیرید به طوری که $|x_۱| + |x_۲| + ... + |x_{۱۰۰}| = ۱$ و $x_۱ + x_۲ + ... + x_{۱۰۰} = ۰$ بین همه این ۱۰۰ تایی های اعداد، بیشترین مقداری که $x_{۷۶} - x_{۱۶}$ میتواند بگیرد $\frac{m}{n}$ است که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند که نسبت به هم اولند. $m + n$ را بیابید.

2022 AIME II

پرسش ۱۹. تعداد جایگشت های $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵$ را از اعداد ۱و ۲ و ۳و ۴و ۵ بیابید به طوری که مجموع پنج حاصلضرب

$$x_۱x_۲x_۳ + x_۲x_۳x_۴ + x_۳x_۴x_۵ + x_۴x_۵x_۱ + x_۵x_۱x_۲$$

بر ۳ بخش پذیر باشند.

2021 AIME II

پرسش ۲۰. شش کارت با شماره های ۱ تا ۶ در یک ردیف چیده شده اند. تعداد چینش هایی از این ۶ کارت را بیابید که در هر یک از آن ها بتوان طوری ۱ کارت را حذف کرد که ترتیب مابقی صعودی یا نزولی باشد.

2020 AIME I