



## آزمون ترکیبی CHMMCJHMTEMCCINTEGIRLS 4

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

**پرسش ۱.** قورباغه‌ای در نقطه  $(1, 1)$  صفحه مختصات قرار دارد. در هر ثانیه، قورباغه به صورت تصادفی یک واحد به بالا، چپ، پایین، یا راست می‌پرد. او حرکات خود را به گونه‌ای انجام می‌دهد که هرگز از مربعی با رأس‌های  $(0, 0)$ ،  $(0, 3)$ ،  $(3, 3)$  و  $(3, 0)$  خارج نشود. احتمال این‌که قورباغه در یکی از سه پرش بعدی با یکی از ضلع‌های مربع تماس پیدا کند چقدر است؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، دور گاتس، سؤال ۱۰

**پرسش ۲.** یک عدد صحیح مثبت هفت‌رقمی را پلکانی می‌نامیم، هرگاه ارقام آن از چپ به راست اکیداً صعودی باشند. تعداد اعداد پلکانی بخش‌پذیر بر ۳ را پیدا کنید.

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، آزمون سرعت، سؤال ۱۸

**پرسش ۳.** یک محور اعداد با اعداد صحیح ۱ تا ۲۰، از چپ به راست، رسم شده است. ده سکه روی این محور قرار داده شده‌اند، به طوری که روی هر عدد فرد محور یک سکه قرار دارد. یک حرکت مجاز عبارت است از جابه‌جا کردن یک سکه از مکان فعلی‌اش به مکانی با مقدار اکیداً بزرگ‌تر روی محور که از قبل توسط سکه دیگری اشغال نشده باشد. به چند روش می‌توانیم از وضعیت اولیه سکه‌ها، دو حرکت مجاز را به ترتیب انجام دهیم؟ توجه کنید که دنباله‌های دو حرکتی متفاوتی که به یک وضعیت یکسان منجر شوند، متمایز شمرده می‌شوند.

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۱، بخش دبیرستان، دور ترکیبیات، سؤال ۷

**پرسش ۴.** سه تاس استاندارد شش وجهی به طور مستقل انداخته می‌شوند. فرض کنید  $q$  حاصل ضرب عددهای روی سه وجه آمده باشد و  $p$  بزرگ‌ترین عامل اول  $q$  باشد. در صورتی که  $q$  برابر ۱ بود  $p$  را نیز برابر ۱ فرض کنید. امید ریاضی  $p$  را محاسبه کنید.

مسابقه ریاضی اینتگرلز پاییز ۲۰۲۵، بخش دبیرستان، آزمون تیمی، سؤال ۶

**پرسش ۵.** یک عدد صحیح مثبت را رنگی می‌نامیم اگر چپ‌ترین رقم آن ۱ باشد و هر رقم بعدی یا با رقم سمت چپش برابر باشد یا ۱ واحد از آن بیشتر باشد. فرض کنید  $N$  مجموع همه اعداد رنگی کوچک‌تر از یک میلیارد باشد. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه فرد  $N$  چیست؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، دور گاتس، سؤال ۲۱

**پرسش ۶.** والتر ۱۱ دمبل با وزن‌های ۱ تا ۱۱ پوند دارد. والتر می‌خواهد دمبل‌هایش را به سه گروه با مجموع وزن‌های برابر تقسیم کند. کوچک‌ترین حاصل ضرب ممکن وزن دمبل‌های یکی از این گروه‌ها چیست؟

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۱، بخش دبیرستان، دور عمومی، سؤال ۱

**پرسش ۷.** شش مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه مختصات رسم شده‌اند، به طوری که هر مثلث یک ضلع موازی محور  $x$  داشته باشد. اگر محیط‌های هر دو مثلث فقط در تعداد متناهی‌ای از نقاط اشتراک داشته باشند و  $N$  نقطه روی محیط دو یا چند تا از مثلث‌ها قرار داشته باشد، بیشترین مقدار ممکن  $N$  چیست؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، آزمون دقت، سؤال ۶

**پرسش ۸.** یک عدد صحیح مثبت را خوش‌دست می‌نامیم اگر رقم‌های آن را بتوان به دو بخش از رقم‌های متوالی تقسیم کرد که مجموع رقم‌هایشان ۷ و ۱۱ باشد. برای مثال، ۳۴۵۶ خوش‌دست است، اما ۴۲۴۷ خوش‌دست نیست. تعداد اعداد صحیح مثبت خوش‌دست کوچک‌تر یا مساوی  $۱۰^5$  را حساب کنید.

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۴، بخش دبیرستان، دور انفرادی، سؤال ۱۱

**پرسش ۹.** دنی در حال رزرو چند بازه ۷ روزه در یک تفریحگاه لوکس در یک جزیره است. او می‌داند که آنجا هوا به صورت چرخه‌ای بین ۶۰ روز متوالی طوفانی و ۱۰ روز متوالی آفتابی تغییر می‌کند. با این حال، او در حال حاضر وضعیت هوا را نمی‌داند. کمترین تعداد بازه‌هایی که دنی باید رزرو کند تا تضمین کند دست‌کم یک بازه داشته باشد که هر روزش آفتابی است، چقدر است؟ توجه کنید که هیچ دو بازه رزرو شده او نباید هم‌پوشانی داشته باشند.

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، دور گاتس، سؤال ۱۴

**پرسش ۱۰.** فرض کنید  $N$  تعداد دنباله‌های  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  از ده عدد صحیح مثبت باشد به طوری که:

- (۱) مقدار هر جمله دنباله حداکثر ۳۰ باشد،
- (۲) میانگین حسابی هر سه جمله پیاپی دنباله عددی صحیح باشد،
- (۳) میانگین حسابی هر پنج جمله پیاپی دنباله عددی صحیح باشد.

مقدار  $N$  را حساب کنید.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۷، دور تساوی‌شکن، سؤال ۲

**پرسش ۱۱.** یک عدد هم‌رقم، عدد صحیح مثبتی است که همه رقم‌هایش یکسان باشند. تفاضل دو عدد هم‌رقم، حداکثر چند رقم متمایز می‌تواند داشته باشد؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، آزمون سرعت، سؤال ۱۷

**پرسش ۱۲.** فرض کنید  $S = \{1, 2, 3, \dots, 26\}$ . تعداد راه‌هایی را بیابید که بتوان  $S$  را به سیزده زیرمجموعه افراز کرد، به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

- (۱) هر زیرمجموعه شامل دو عضو از  $S$  باشد و
- (۲) تفاضل بین دو عضو هر زیرمجموعه ۱ یا ۱۳ باشد.

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۱، بخش دبیرستان، دور ترکیبیات، سؤال ۹

**پرسش ۱۳.** دو شهر  $A$  و  $B$ ، ۱۰۰ مایل از هم فاصله دارند. با شروع از نیمه شب هر ۲۰ دقیقه، اتوبوسی با سرعت ۶۰ مایل بر ساعت از شهر  $A$  به شهر  $B$  حرکت می‌کند؛ و هر ۳۰ دقیقه، اتوبوسی با سرعت ۲۰ مایل بر ساعت از شهر  $B$  به شهر  $A$  حرکت می‌کند. دیرک در شهر  $A$  شروع می‌کند و در ساعت ۱۲ ظهر سوار اتوبوسی می‌شود که به سمت شهر  $B$  می‌رود. اما دیرک همیشه می‌ترسد سوار اتوبوسی شده باشد که در جهت اشتباه می‌رود، بنابراین هر بار اتوبوسی که در آن است از کنار اتوبوس دیگری می‌گذرد، پیاده می‌شود و به آن اتوبوس دیگر منتقل می‌شود. دیرک پس از گذشت چند ساعت به شهر  $B$  می‌رسد؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۷، بخش تیمی، سؤال ۳

**پرسش ۱۴.** یک فهرست از اعداد صحیح مثبت ویژگی‌های زیر را دارد:

(۱) میانگین فهرست ۸ است.

(۲) میانه فهرست ۱۳ است.

(۳) مد فهرست ۱۵ است.

همچنین دامنه فهرست (تفاضل بیشترین و کمترین عضو آن) ۲۷ است. کمترین تعداد ممکن اعضای فهرست چقدر است؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، دور گاتس، سؤال ۱۸

**پرسش ۱۵.** یک مربع واحد را در نظر بگیرید که رأس‌های آن در جهت عقربه‌های ساعت و به ترتیب با ۱، ۲، ۳، ۴ برچسب‌گذاری شده‌اند. فرد قورباغه، با این قوانین بین رئوس مربع می‌پرد: او از رأس با برچسب ۱ شروع می‌کند و در هر رأس، با احتمال  $\frac{1}{3}$  به رأس قطری روبه‌رو می‌پرد و با احتمال  $\frac{1}{4}$  به هر یک از دو رأس مجاور می‌پرد.

احتمال این را بیابید که پس از ۲۰۱۹ پرش، مجموع برچسب‌های دو رأس آخری که فرد از آن‌ها بازدید کرده است برابر ۳ باشد.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۹، بخش انفرادی، سؤال ۹

**پرسش ۱۶.** در یک جدول ۸ در ۸، یک مسیر بالا-راست دنباله‌ای از ۱۵ خانه است که از خانه پایین-چپ شروع می‌شود و در خانه بالا-راست پایان می‌یابد، به طوری که هر خانه مستقیماً بالای خانه قبلی یا در سمت راست آن باشد. چند مجموعه متشکل از ۸ مسیر بالا-راست متمایز وجود دارد به طوری که دقیقاً یک عضو مجموعه از هر یک از ۳۶ خانه داخلی جدول عبور کند؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، آزمون تیمی، سؤال ۱۵

**پرسش ۱۷.** یک مجموعه متناهی  $S$  از نقاط صفحه را سه‌جدایی‌پذیر می‌نامیم اگر برای هر زیرمجموعه  $A \subseteq S$  از نقاط مجموعه داده‌شده، بتوان مثلی مانند  $T$  در صفحه یافت به طوری که هر نقطه  $A$  داخل  $T$  و هر نقطه  $S$  که در  $A$  نیست بیرون  $T$  باشد. کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت  $n$  را بیابید که هیچ مجموعه‌ای از  $n$  نقطه متمایز سه‌جدایی‌پذیر نباشد؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۷، بخش انفرادی، سؤال ۴

**پرسش ۱۸.** شما و دوستانتان مأمور شده‌اید در صفحه مختصات دکارتی دوبعدی یک قلعه مقوایی بسازید. قلعه طبق قوانین زیر ساخته می‌شود:

(۱) در مبدأ، برجی با ارتفاع  $2^n$  وجود دارد.

(۲) از برجی با ارتفاع  $2^i \geq 2$ ، می‌توان دیواری به طول  $2^{i-1}$  میان آن برج و یک برج جدید با ارتفاع  $2^{i-1}$  ساخت. دیوارها باید با یکی از محورهای مختصات موازی باشند و هر برج باید با دست‌کم یک دیوار به برج دیگری متصل باشد.

اگر هر واحد ارتفاع برج ۹ دلار و هر واحد طول دیوار ۳ دلار هزینه داشته باشد و  $n$  برابر ۱۰۰۰ باشد، چند هزینه متمایز برای قلعه‌هایی که شرط‌های بالا را برآورده می‌کنند وجود دارد؟ دو قلعه متمایز شمردن می‌شوند اگر برجی یا دیواری وجود داشته باشد که در یکی از قلعه‌ها باشد و در دیگری نباشد.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۹، بخش انفرادی، سؤال ۱۳

**پرسش ۱۹.** فرض کنید  $\Lambda$  مجموعه نقاط  $(x, y)$  در فضای دوبعدی با مختصات صحیح باشد به طوری که  $0 \leq x \leq 4$  و  $0 \leq y \leq 2$  یعنی

$$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}.$$

تعداد راه‌های وصل کردن نقاط  $\Lambda$  را با پاره‌خط‌هایی به طول  $\sqrt{2}$  یا  $\sqrt{5}$  بیابید، به طوری که هر مربع واحدی که رأس‌هایش در  $\Lambda$  هستند، بخشی از دقیقاً یک پاره‌خط را در خود داشته باشد. روش‌هایی که با بازتاب از هم به دست می‌آیند متمایز شمرده می‌شوند. شکل زیر یک روش اتصال را نشان می‌دهد:



تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۲، بخش دبیرستان، دور عمومی، سؤال ۱۰

**پرسش ۲۰.** هگزومینو شکلی است که از ۶ مربع واحد متصل ساخته شده است. گرنٹ باید یک مستطیل  $2 \times 6$  را به هگزومینوهای همنهشت تقسیم کند. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد؟ تقسیم‌بندی‌هایی که با چرخش یا بازتاب از هم به دست می‌آیند متمایز شمرده می‌شوند.

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، دور گاتس، سؤال ۱۵