آزمون تئوری تارجان
۲۸ ام اسفند تا ۷ ام فروردین ماه ۱۴۰۳
آزمون هشتم

Tarjan

هپی (Happy)

Happy

۱. فرض کنید $n \geq ۲$ عددی طبیعی باشد. در یک فضاپیما، n شهروند حضور دارند. هر فرد u به تعدادی از افراد اتهام وارد می‌کند. می‌دانیم سه شرط زیر در مورد اتهام‌ها صادق است:

- هر دو شهروندی تعداد متفاوتی اتهام وارد کرده‌اند.
- به هر دو شهروندی تعداد متفاوتی اتهام وارد شده است.
- هیچ اتهامی از طرف کسی به خودش وارد نیامده است.

همچنین واضح است یک نفر نمی‌تواند به فرد دیگری دوبار اتهام وارد کند. نشان دهید هیچ دو شهروندی وجود ندارند که هر دو به هم اتهام وارد کرده باشند. (به بیانی دیگر، هیچ دو فرد a و b ای وجود ندارند که هم فرد a فرد b را متهم کرده باشد و هم فرد b فرد a را متهم کرده باشد.)

نیو (New)

۲. جدولی $m \times n$ را در نظر بگیرید که سطرهای آن از بالا به پایین و ستون‌های آن از چپ به راست به ترتیب به شکل $1, 2, \dots, m$ و $1, 2, \dots, n$ شماره‌گذاری شده باشند. به خانه‌ی واقع در سطر i و ستون j، خانه‌ی (i, j) گوییم. $(m-1)(n-1)$ سکه در زیرمستطیل بالا چپ جدول قرار گرفته‌اند. (پس در تمام خانه‌های (i, j) که $1 \leq i < m$ و $1 \leq j < n$ دقیقا یک سکه قرار دارد.)

می‌دانیم اگر سکه‌ای در خانه‌ی (i, j) قرار داشته باشد و خانه‌های $(i+1, j)$، $(i, j+1)$، $(i+1, j+1)$ وجود داشته باشند و خالی باشند، می‌توانیم سکه‌ی خانه‌ی (i, j) را به خانه‌ی $(i+1, j+1)$ منتقل کنیم. با متناهی (نه لزوما غیر صفر) عمل به چند چینش متفاوت از سکه‌ها در جدول می‌توان دست یافت؟

یر (Year)

۳. $n > 1$ شهر در یک کشور وجود دارند. برخی زوج از شهرها با پروازهای دو طرفه به یکدیگر مرتبط شده‌اند. برای هر دو شهر، می‌دانیم دقیقا یک مسیر مسافرتی (که می‌تواند از چند پرواز تشکیل شده باشد) وجود دارد.

برای هر شهر X، شهردار آن شهر تعداد حالات شماره‌گذاری راس‌ها با اعداد ۱ تا n را شمرده که به ازای هر مسیر آغاز شده از شهر X، اعداد روی شهرهای مسیر به ترتیب صعودی قرار داشته باشند.

همه‌ی شهردارها بجز شهردار شهر Y به این نتیجه رسیده‌اند تعداد چنین برچسب‌گذاری‌هایی برای شهر خودشان مضربی از ۲۰۲۴ است. نشان دهید شهردار شهر Y هم به این نتیجه خواهد رسید که تعداد چنین برچسب‌گذاری‌های شهر خودش، مضرب ۲۰۲۴ است.

توضیح: یک «مسیر» در کشور بیان شده، توالی‌ای از شهرها است که هر دو شهر متوالی با پرواز هوایی مستقیمی به هم مرتبط شده باشند و هیچ شهری دوبار دیده نشود.

بععععع (Baaaa)

۴. n را عددی صحیح و مثبت در نظر گیرید. B_n را مجموعه‌ی تمام رشته‌های دودویی به طول n در نظر گیرید. برای هر رشته‌ی دودویی $s_۱s_۲\dots s_n$، عملیات پیچاندن را روی آن چنین تعریف می‌کنیم. ابتدا، تعداد بلوک‌های ماکسیمال رشته که از رقم‌های یکسانی تشکیل شده‌اند را می‌شماریم. تعداد آن‌ها را b در نظر بگیرید. سپس، s_b را با $s_b - ۱$ جایگزین کنید (به بیانی، b امین رقم رشته را تغییر می‌دهیم.) به رشته‌ی b' نواده‌ی رشته‌ی b گوییم اگر با متناهی عمل پیچاندن بتوان از b به b' رسید. یک زیرمجموعه از B_n را «برشی» نامیم اگر هیچ دو عضوی از آن نواده‌ی مشترک نداشته باشند. بیشینه‌ی تعداد اعضای یک مجموعه‌ی برشی را بیابید.

مثال: عمل پیچاندن، رشته‌ی ۱۰۱۱۰۰ را به ۱۰۱۰۰۰ تبدیل می‌کند چون رشته‌ی ابتدایی، از چهار بلوک ماکسیمال تشکیل شده است. (۱|۰|۱۱|۰۰)