آزمون تئوری تارجان
۱۷ ام اسفند تا ۲۵ ام اسفند ماه ۱۴۰۲
آزمون هفتم

Tarjan

نمک (Namak)

Namak

۱. n را عددی صحیح و مثبت در نظر بگیرید. سیزیف، دنباله‌ای از عملیات‌ها را روی n سنگ انجام می‌دهد. n کوه در یک ردیف قرار گرفته‌اند که میانشان، $n+۱$ دره برای جای‌گیری سنگ‌ها موجود است. دره‌ها را از چپ به راست، ۱ تا $n+۱$ شماره‌گذاری می‌کنیم. در حال حاضر تمام n سنگ موجود، سمت چپ اولین کوه (سمت چپ‌ترین کوه) قرار دارند. در یک گام، سیزیف می‌تواند یک دره را انتخاب کند. فرض کنید دره‌ی انتخابی او k سنگ داشته باشد. او یکی از این k سنگ را برداشته و می‌تواند حداکثر به k دره راست‌تر بغلتاند. (برای مثال اگر سنگ‌های در نظر گرفته شده در دره‌ی دوم باشند، او می‌تواند یک سنگ را به یکی از دره‌های $۳, ۴, \ldots, k+۲$ به انتخاب خود انتقال دهد) به طوری که در راست‌ترین دره و یا یکی از دره‌های سمت چپ آن قرار گیرد. سیزیف پس از مدتی تمام سنگ‌ها را به آخرین دره (راست‌ترین دره) منتقل کرده است. ثابت کنید او حداقل

$$\left\lfloor \frac{n}{۱} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{۳} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

عملیات انجام داده است.

Tarjan

نمکدان(Namakdan)

Namakdan

۲. جوکو ۱۰۰ جلد اول کتاب «پری هاتر» را خریده و در خانه نگه‌داری می‌کند. برای هر i و j که $1 \leq i < j \leq 100$، جفت (i, j) را یک نابجایی نامیم اگر کتاب j ام قبل از کتاب i ام ظاهر شده باشد. جوکو می‌خواهد تمام این ۱۰۰ کتاب را در یک ردیف به نحوی بچیند که هیچ سه عددی مثل $1 \leq i < j < k \leq 100$ وجود نداشته باشند که (i, j) و (j, k) هر دو نابجایی باشند. بیشینه‌ی تعداد نابجایی‌ها که ممکن است در ترتیب چینش جوکو رخ دهد را بدست آورید.

Tarjan

شوری(Shoori)

Shoori

۳. n را عددی طبیعی در نظر بگیرید. صفحه‌ی بازی «مستر سودوکو» از $\frac{n(n+1)}{2}$ خانه به وجود آمده که متشکل از خانه‌های روی قطر اصلی یا زیر آن در یک جدول $n \times n$ می‌باشد. یک معلم به طور پنهانی n تا از این خانه‌ها را انتخاب کرده و به شاگردش دو مورد زیر را اطلاع می‌دهد.

a. n عدد به شاگرد گزارش می‌دهد که عدد i ام، تعداد خانه‌های انتخاب شده از سطر i است.

b. به او قول می‌دهد از هر ستون دقیقا یک خانه انتخاب کرده باشد.

خانه‌های انتخاب شده توسط معلم، یک «مستر سودوکو» تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر شاگرد بر حسب اطلاعات دریافتی از معلم، به طور یکتا بتواند جای خانه‌های انتخابی او را مشخص کند. با توجه به اطلاعات داده شده، چند مستر سودوکو بر حسب n وجود دارد؟

آزمون تئوری تارجان
۱۷ ام اسفند تا ۲۵ ام اسفند ماه ۱۴۰۲
آزمون هفتم

ندارد(Nadarad)

Nadarad

۴. یک $۲n+۲m$ ضلعی داده شده است که $۲m$ راس آن سفید و $۲n$ راس دیگرش مشکی هستند. فاصله‌ی رنگی دو راس سیاه، کمینه تعداد راس‌های سفید روی یکی از دو کمان بین این دو راس هستند. به طور مشابه، فاصله‌ی رنگی دو راس سفید، کمینه‌ی تعداد راس‌های سیاه روی یکی از دو کمان بین این دو راس می‌باشد.

فاصله‌ی رنگی بین دو راس A و B را با $d(A,B)$ نمایش می‌دهیم. یک تطابق از راس‌های سفید مانند W را چنان تعریف می‌کنیم که راس‌های سفید را به طور $A_۱, A_۲, \ldots, A_m, B_۱, B_۲, \ldots, B_m$ نام‌گذاری کنیم که هیچ $۱ \le i < j \le m$ ای وجود نداشته باشند که خط A_iB_i و A_jB_j تقاطع داشته باشند. به طور مشابه، یک تطابق از راس‌های سیاه مانند B را چنان تعریف می‌کنیم که راس‌های سیاه به صورت $C_۱, C_۲, \ldots, C_n, D_۱, D_۲, \ldots, D_n$ نام‌گذاری کنیم که هیچ $۱ \le i < j \le n$ ای وجود نداشته باشند که خط C_iD_i و C_jD_j تقاطع داشته باشند.

همچنین، تعریف می‌کنیم

$$P(W) = \sum_{i=۱}^{m} d(A_i, B_i), \qquad P(B) = \sum_{i=۱}^{n} d(C_i, D_i).$$

نشان دهید که

$$\max_{W}\{P(W)\} = \max_{B}\{P(B)\}.$$

(یعنی بیشینه مقدار $P(W)$ به ازای تمام W های ممکن، با بیشینه‌ی مقدار $P(B)$ به ازای تمام B های ممکن یکسان است.)