آزمون تئوری تارجان
۲۸ ام آذر تا ۴ ام دی ماه ۱۴۰۲
آزمون پنجم

Tarjan

عجیب(Ajib)

۱. دو جادوگر، آلبوس و برایان، در حال بازی بر مربعی به ضلع $۲n + ۱$ هستند که به مربع‌های به ضلع واحد افراز شده است. در ابتدا، یک قورباغه در خانه‌ی مرکزی این مربع قرار دارد. در نوبت یک جادوگر، او یکی از چهار جهت موازی با اضلاع مربع را در نظر می‌گیرد و قورباغه را جادو می‌کند. در نتیجه‌ی این عمل، قورباغه i واحد در جهت مورد نظر جادوگر می‌پرد که i در ابتدا ۱ است و با هر پرش قورباغه، یک واحد افزوده می‌شود. اولین نفری که باعث بیرون افتادن قورباغه از جدول شود، می‌بازد. آلبوس بازی را آغاز می‌کند. بر حسب n، تعیین کنید چه کسی استراتژی برد دارد.

بود(Bood)

Bood

۲. باگز بانی، در صفحه‌ی مختصات دو بعدی بازی می‌کند. در دقیقه‌ی n ام، او F_n واحد در یکی از چهار جهت شمال، جنوب، شرق یا غرب می‌پرد که F_n جمله‌ی n ام دنباله‌ی فیبوناچی می‌باشد. اگر دو پرش اول باگز، با هم زاویه‌ی ۹۰ درجه درست کنند، نشان دهید او هیچگاه نمی‌تواند به نقطه‌ای که از آن شروع کرده بازگردد.

دنباله‌ی فیبوناچی بدین شکل تعریف می‌شود:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (n > 2), \qquad F_1 = F_2 = 1.$$

Tarjan

نبود(Nabood)

Nabood

۳. در یک حوضچه، $n > 2$ سنگ دور دایره‌ای چیده شده‌اند. یک پرنسس، می‌خواهد این سنگ‌ها را با شماره‌های $1, 2, \ldots, n$، به نحوی دلخواه شماره‌گذاری کند و تعدادی قورباغه بر روی برخی از سنگ‌ها به دلخواه قرار دهد. زمانی که قورباغه‌ها بر سنگ‌ها قرار گرفتند، به طور همزمان شروع به پریدن در جهت ساعتگرد می‌کنند. با این قانون که، زمانی که قورباغه‌ای به سنگی با شماره k برسد، k دقیقه پیش از پرش بعدی‌اش صبر خواهد کرد و سپس به سنگ مجاور خواهد پرید. بیشینه‌ی تعداد قورباغه‌هایی که پرنسس می‌تواند روی سنگ‌ها بگذارد به نحوی که هیچ گاه دو قورباغه بر روی سنگی مشترک در هیچ زمانی قرار نگیرند، چند تا است؟

نکته: دو قورباغه را زمانی بر روی سنگی مشترک می‌شماریم که حداقل یک دقیقه هر دو روی آن قرار داشته باشند.

؟(؟)؟

۴. اعداد صحیح مثبت به دو دسته‌ی $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ و $b_1 < b_2 < b_3 < \dots$ افراز شده‌اند (به بیانی دیگر، هر عدد در دقیقا یکی از این دو دسته قرار گرفته است.) به نحوی که $b_n = a_n + n$ برای هر n صحیح مثبت. نشان دهید برای هر n صحیح:

$$a_n + b_n = a_{b_n}.$$