

۱. پیترا ۱۰۰۱ کارت در دست دارد که با خودکاری آبی روی هر کارت عددی از ۱ تا ۱۰۰۱ نوشته، طوری که هر عدد دقیقا روی یک کارت ظاهر شود. او کارت‌ها را دور دایره چیده به نحوی که اعداد آبی‌رنگ زیر کارت‌ها باشند. سپس، برای هر کارت  $C$ ، او ۵۰۰ کارت بعدی آن را می‌نگرد و  $f(C)$  را تعداد کارت‌هایی از این ۵۰۰ کارت در نظر می‌گیرد که عدد آبی نوشته شده زیر آن‌ها بزرگتر از عدد آبی نوشته شده زیر کارت  $C$  باشد. در نهایت  $f(C)$  را با رنگ قرمز روی کارت  $C$  می‌نویسد و این فرآیند را برای تمامی کارت‌ها تکرار می‌کند. با سیل پس از تمام شدن فرآیند، تنها اعداد قرمز روی کارت‌ها را می‌تواند ببیند. ثابت کنید او می‌تواند بر حسب مشاهداتش، اعداد آبی زیر هر کارت را به طور یکتا تعیین کند.

## اگر (Agar)

Agar

۲. یک شبکه کامپیوتری را در نظر بگیرید که برخی سرورهای آن با مجراهای ارتباطی دو طرفه به یکدیگر متصل شده‌اند. متأسفانه همه‌ی مجراها به طور سالم کار نمی‌کنند. هر جهت یک مجرا به احتمال  $P$  دچار مشکل خواهد شد و توانایی استفاده از آن را نخواهیم داشت و در غیر این صورت، سالم و کارآمد خواهد بود. (هر یک از خرابی‌ها به طور مستقل ممکن است رخ دهد و  $0 \leq P \leq 1$ ) در میان سرورها، یک سرور اصلی وجود دارد که آن را «ریشه» خطاب می‌کنیم. شبکه کامپیوتری را «کارا» نامیم اگر بتوان بر حسب جهت‌های کارآمد هر مجرا، از هر سروری به سرور ریشه اطلاعات انتقال داد. دقت کنید نیازی نیست که در یک شبکه‌ی کارا ریشه بتواند به هر سرور دیگری انتقال اطلاعات داشته باشد. نشان دهید احتمال کارا بودن یک شبکه، مجزا از انتخاب ریشه است. (یعنی به ازای انتخاب هر سرور به عنوان ریشه، احتمال کارا بودن سیستم تفاوتی نخواهد داشت.)

۳. دو بازیکن  $R$  و  $B$  بازی زیر را روی جدول نامتناهی از هر جهت (هر خانه‌ی جدول، مربعی به ضلع واحد می‌باشد.) که همه‌ی خانه‌های آن در ابتدا سفید است، انجام می‌دهند. بازی با نفر  $B$  شروع می‌شود. او در هر نوبت، می‌تواند یک خانه‌ی رنگ نشده را انتخاب کرده و آن را به رنگ آبی در بیاورد. فرد  $R$  نیز در نوبت خود می‌تواند ۲ خانه‌ی رنگ نشده را انتخاب کند و به رنگ قرمز در بیاورد. فرد  $B$  می‌تواند در هر مرحله که بخواهد بازی را متوقف کند. پس از توقف بازی، امتیاز فرد  $B$  برابر با بیشینه مساحت یک ناحیه همبند ضلعی است که همه‌ی مربع‌هایش به رنگ آبی باشند. بیشینه امتیازی که نفر  $B$  مطمئن به کسب آن است چقدر می‌باشد؟



آزمون تئوری تارجان  
۱۸ ام آذر تا ۲۴ ام آذر ماه ۱۴۰۲  
آزمون سوم

Bar

بار (Bar)

۴. در برخی از خانه‌های جدولی  $200 \times 200$  مهره‌ای قرمز و در برخی دیگر از خانه‌ها مهره‌ی آبی قرار دارد. هر مهره، تمام مهره‌های هم‌سطر و تمام مهره‌های هم‌ستون خود را می‌بیند. می‌دانیم هر مهره، دقیقاً ۵ مهره از رنگ مخالف خود را می‌بیند. بیشینه تعداد مهره‌های داخل این جدول را بیابید.