



آزمون ترکیبی CHMMCJHMTEMCCINTEGIRLS 3

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. یک «اسب مربعی» مهره‌ای در شطرنج است که مانند اسب حرکت می‌کند، اما به جای این که ۱ واحد در یک جهت و ۲ واحد در جهت عمود بر آن حرکت کند، ۲ واحد در یک جهت و ۲ واحد در جهت عمود بر آن حرکت می‌کند. به چند روش می‌توان دو اسب مربعی یکسان را روی یک صفحه شطرنج 7×7 قرار داد، به طوری که به یکدیگر حمله نکنند؟

مسابقه ریاضی اینتگرلز پاییز ۲۰۲۵، بخش دبیرستان، آزمون انفرادی، سؤال ۹

پرسش ۲. یک سکه غیرعادی به گونه‌ای است که اگر ۱۰ بار پرتاب شود، احتمال این که تعداد کل شیرها زوج باشد برابر $\frac{2}{3}$ است. اگر به جای آن، سکه ۲۰ بار پرتاب شود، احتمال این که تعداد کل شیرها زوج باشد چقدر است؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، آزمون سرعت، سؤال ۱۳

پرسش ۳. استر تصمیم می‌گیرد برای ۵۶ دانش‌آموز مدرسه‌اش یک مسابقه سنگ-کاغذ-قیچی برگزار کند. طبق قانون، شرکت‌کنندگان باید دو بار ببازند تا حذف شوند. هر شرکت‌کننده به محض این که برای دومین بار ببازد از مسابقه حذف می‌شود. در هر دور، همه شرکت‌کنندگان باقی‌مانده در دوئل‌های تک‌بازی سنگ-کاغذ-قیچی با هم جفت می‌شوند. اگر در یک دور تعداد شرکت‌کنندگان فرد باشد، یک شرکت‌کننده تصادفی در آن دور بازی نمی‌کند و به طور مستقیم به دور بعد می‌رود. بیشترین تعداد مسابقه لازم برای تعیین قهرمان سنگ-کاغذ-قیچی چقدر است؟

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۰، بخش مدرسه راهنمایی، سؤال ۱۵

پرسش ۴. فرض کنید معادله

$$\begin{array}{r} C H M M C \\ + H M M T \\ \hline P U M A C \end{array}$$

برقرار باشد، که در آن هر حرف نماینده یک رقم نامنفی است و حروف متمایز نماینده رقم‌های متفاوت‌اند. بنابراین $CHMMC$ و $PUMAC$ هر دو عدد صحیح مثبت پنج‌رقمی‌اند و $HMMT$ عدد صحیح مثبت چهاررقمی است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن عدد صحیح مثبت پنج‌رقمی $CHMMC$ چیست؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۷، بخش انفرادی، سؤال ۲

پرسش ۵. یک برکه بزرگ بی‌نهایت برگ نیلوفر دارد که با $1, 2, 3, \dots$ برچسب‌گذاری شده‌اند و روی یک خط قرار گرفته‌اند؛ برگ $k + 1$ یک واحد سمت راست برگ k است. قورباغه‌ای از برگ ۱۰۰ شروع می‌کند. در هر دقیقه، اگر روی برگ n باشد، با احتمال $\frac{n-1}{n}$ به برگ $n + 1$ می‌پرد و با احتمال $\frac{1}{n}$ به برگ ۱ برمی‌گردد. فرض کنید قورباغه پس از ۱۰۰۰ دقیقه روی نیلوفر N باشد. مقدار $E[N]$ چیست؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۸، دور تساوی‌شکن، سؤال ۱

پرسش ۶. آقای براون ۱۰ دونات شکلاتی یکسان و ۱۵ دونات کاراملی یکسان دارد. او می‌داند که آلیس ۶ دونات، بنی ۹ دونات و کالی ۱۰ دونات می‌خواهند. او به چند روش می‌تواند ۲۵ دوناتش را توزیع کند؟

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۰، بخش مدرسه راهنمایی، سؤال ۱۷

پرسش ۷. در یک کنسرت، ۶ خواننده اجرا خواهند کرد. هر خواننده به صورت تصادفی یک زیرمجموعه از خواننده‌های دیگر را انتخاب می‌کند و درخواست می‌کند بعد از همه خواننده‌های آن زیرمجموعه اجرا کند. توجه کنید که زیرمجموعه انتخابی یک خواننده ممکن است تهی باشد. فرض کنید N تعداد ترتیب‌های اجرای خواننده‌ها باشد که همه خواسته‌هایشان را برآورده کند. امید ریاضی N چقدر است؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، دور گاتس، سؤال ۱۹

پرسش ۸. ریچل روی محور اعداد در عدد \circ زندگی می‌کند. یک روز، ریچل تصمیم می‌گیرد از اعداد $۱, ۲, ۳, \dots, ۳۱$ بازدید کند. او از عدد \circ همراه با فهرستی از اعدادی که می‌خواهد از آن‌ها بازدید کند شروع می‌کند. سپس ریچل به‌طور یکنواخت و تصادفی یکی از عددهای فهرستش را انتخاب می‌کند، آن را از فهرست خط می‌زند و در مسیر مستقیم به آن عدد می‌رود. او این فرایند را تکرار می‌کند تا همه ۳۱ عدد فهرست اولیه‌اش را خط زده و بازدید کرده باشد. سپس در پایان سفرش، به خانه‌اش در \circ برمی‌گردد. امید ریاضی مسافت طی شده توسط ریچل چقدر است؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۷، بخش تیمی، سؤال ۹

پرسش ۹. گرنت به چند عدد فکر می‌کند که مجموعشان ۱۰۰ است. او هر عدد را به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد می‌کند و نتایج را می‌نویسد. اگر مجموع اعداد جدید برابر ۹۷ شود، کمترین تعداد عددهایی که گرنت می‌توانسته نوشته باشد چقدر است؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، آزمون تیمی، سؤال ۷

پرسش ۱۰. یک قورباغه روی نقاط شبکه‌ای صفحه مختصات به روش زیر می‌پرد: در هر پرش، قورباغه به‌صورت تصادفی به یکی از ۸ نقطه شبکه‌ای مجاورش می‌رود، با این شرط که در دو پرش پیاپی هرگز در یک جهت حرکت نکند. اگر قورباغه از $(۲۰, ۱۹)$ شروع کند و در حرکت اول به $(۲۰, ۲۰)$ برسد، امید ریاضی مکان قورباغه پس از این‌که به‌مدت بی‌نهایت طولانی بپرد چقدر است؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۹، بخش تیمی، سؤال ۳

پرسش ۱۱. گرگ یک شبکه ۹×۹ از مربع‌های واحد دارد. در هر مربع شبکه، او یک رقم ناصفر می‌نویسد. فرض کنید N تعداد روش‌هایی باشد که گرگ می‌تواند این رقم‌ها را بنویسد، به طوری که هر یک از نه عدد نه‌رقمی تشکیل‌شده از سطرهای شبکه، با خواندن رقم‌های هر سطر از چپ به راست و هر یک از نه عدد نه‌رقمی تشکیل‌شده از ستون‌ها، با خواندن رقم‌های هر ستون از بالا به پایین، مضرب ۳ باشند. مقدار N را بیابید.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۷، بخش انفرادی، سؤال ۶

پرسش ۱۲. چند زیرمجموعه ۵ عضوی از $\{1, 2, \dots, 12\}$ وجود دارد که هیچ دو عضوش اختلاف ۱، ۶ یا ۱۱ نداشته باشند؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، دور گاتس، سؤال ۲۰

پرسش ۱۳. دیپ اعداد $1, 2, 3, \dots, 8$ را روی یک تخته نوشته است. در هر دقیقه، او به طور یکنواخت و تصادفی یکی از عددهای نوشته شده روی تخته مثل m را انتخاب می کند، آن را پاک می کند و مقدار همه عددهای دیگر روی تخته را به اندازه m افزایش می دهد. پس از هفت دقیقه، فقط یک عدد روی تخته باقی می ماند. امید ریاضی عددی که دیپ پس از هفت دقیقه در نهایت به دست می آورد چقدر است؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۷، بخش انفرادی، سؤال ۹

پرسش ۱۴. در یک جدول بی نهایت از مربع ها، همه مربع ها در ابتدا سفیدند. ارون n مربع را قرمز و n مربع را آبی رنگ می کند، به طوری که:

(۱) هیچ مربعی با هر دو رنگ رنگ نشده باشد.

(۲) هر دو مربع قرمز با مسیری از مربع های قرمز به هم متصل باشند. هر دو مربع متوالی در مسیر باید یک ضلع مشترک داشته باشند.

(۳) هر دو مربع آبی با مسیری از مربع های آبی به هم متصل باشند. هر دو مربع متوالی در مسیر باید یک ضلع مشترک داشته باشند.

(۴) هیچ مربع قرمزی مجاور یک مربع سفید نباشد.

کمترین مقدار ممکن n چیست؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، آزمون تیمی، سؤال ۱۲

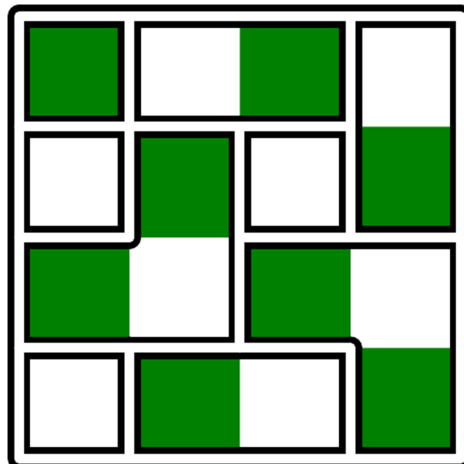
پرسش ۱۵. آلیس به چند روش می‌تواند در هر \square یکی از علامت‌های $+$ ، $-$ ، \times ، یا \div را قرار دهد، به طوری که معادله زیر درست باشد؟ توجه کنید که او نمی‌تواند هیچ پرانتزی اضافه کند.

$$1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 = 2$$

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، دور گاتس، سؤال ۱۹

پرسش ۱۶. یک صفحه شطرنج چهار در چهار را به چند روش می‌توان به پلی‌مینوهایی تقسیم کرد که هر کدام حداکثر یک خانه سفید داشته باشند؟ تقسیم‌بندی‌هایی که با چرخش یا بازتاب از هم به دست می‌آیند متمایز شمرده می‌شوند.

پلی‌مینو ناحیه‌ای همبند از صفحه است که از مربع‌های واحد تشکیل شده باشد. یک نمونه از تقسیم‌بندی معتبر در پایین نشان داده شده است.



مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، آزمون سرعت، سؤال ۲۰

پرسش ۱۷. شما در حال بازی‌ای به نام هووس هستید. در ابتدا عدد 0 روی تخته‌سیاه نوشته شده است. اگر در هر لحظه عدد x روی تخته نوشته شده باشد، می‌توانید x را با $3x + 1$ ، $9x + 1$ ، $27x + 3$ یا $\lfloor x/3 \rfloor$ جایگزین کنید. علاوه بر این، اجازه ندارید عددی بزرگ‌تر از 2017 روی تخته بنویسید. با بازی هووس چند عدد مثبت متفاوت می‌توانید بسازید؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال 2017 ، دور تساوی‌شکن، سؤال ۳

پرسش ۱۸. تعداد راه‌های پوشاندن کامل یک جدول مستطیلی 10×2 از مربع‌های واحد با کاشی‌های به شکل مستطیل‌های 1×2 و مثلث‌های $\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2$ را بیابید، به طوری که همه شرط‌های زیر برقرار باشند:

(۱) اضلاع هر مستطیل باید موازی اضلاع جدول باشند.

(۲) بلندترین ضلع هر مثلث باید موازی یکی از اضلاع جدول باشد.

(۳) هیچ دو کاشی‌ای نباید هم‌پوشانی داشته باشند و هیچ کاشی‌ای نباید از جدول بیرون بزند.

کاشی‌کاری‌هایی که با بازتاب از هم به دست می‌آیند متمایز شمرده می‌شوند. شکل زیر یک نمونه کاشی‌کاری معتبر را نشان می‌دهد:



تورنمنت ریاضی جانز هایپکینز (JHMT) سال 2022 ، بخش دبیرستان، دور ترکیبیات، سؤال ۸

پرسش ۱۹. گرت به مجموعه‌ای از 19 عدد صحیح فکر می‌کند. او برای هر جفت از اعضای (نه لزوماً متمایز) این مجموعه، حاصل‌ضرب آن‌ها را می‌نویسد. کمترین تعداد مقادیر متمایزی که گرت می‌توانسته نوشته باشد چقدر است؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال 2026 ، آزمون تیمی، سؤال ۱۰

پرسش ۲۰. ۱۵ خانم و ۳۰ آقا در یک مهمانی مجلل شرکت می‌کنند. در آغاز مهمانی، هر یک از خانم‌ها با یک آقای تصادفی دست می‌دهد. در پایان مهمانی، هر یک از خانم‌ها دوباره با یک آقای تصادفی دست می‌دهد. یک خانم ممکن است با یک آقا دو بار دست بدهد، یک بار در آغاز و یک بار در پایان مهمانی و هیچ دو خانمی در یک زمان با یک آقای یکسان دست نمی‌دهند.

احتمال این که مجموعه خانم‌ها و آقایانی که دست‌کم یک بار دست داده‌اند بتوانند دور یک دایره چیده شوند، به‌گونه‌ای که هر خانم فقط کنار کسانی قرار بگیرد که با آن‌ها دست داده است چقدر است؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۲۰، بخش تیمی، سؤال ۸