

۱. در هر یک از خانه‌های یک جدول  $2022 \times 2022$  یک درخت با ارتفاع صفر وجود دارد. یک باغبان و یک چوب‌بر، با شروع از باغبان، در این جدول به بازی‌ای می‌پردازند. در هر مرحله از بازی:
- a. باغبان یک خانه از جدول را انتخاب می‌کند. در نتیجه این انتخاب، درخت خانه‌ی انتخاب شده و هر خانه مجاور راسی با آن، یک واحد رشد ارتفاع خواهند داشت.
- b. پس از آن، چوب‌بر چهار خانه دلخواه از جدول را انتخاب می‌کند. از میان این چهار خانه، هر کدام درختی با ارتفاع مثبت داشته باشد یک واحد از طولش کاسته می‌شود.
- گوییم یک درخت جادویی است، اگر ارتفاع آن حداقل  $10^6$  باشد. حداکثر  $k$  ای را بیابید که باغبان مطمئن باشد می‌تواند پس از متناهی عمل،  $k$  درخت جادویی داشته باشد.

۲. برای هر  $n \geq 1$ ، کمینه مقدار عبارت

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{a_k}{k} \right\rfloor$$

را به ازای تمام جایگشت‌های  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  از مجموعه اعداد  $\{1, 2, \dots, n\}$  حساب کنید.



آزمون تئوری تارجان  
۱۱ ام آذر تا ۱۷ ام آذر ماه ۱۴۰۲  
آزمون دوم

Azhame

## ازهمه (Azhame)

۳. یال‌های یک گراف کامل  $2n + 1$  راسی با سه رنگ مختلف رنگ شده‌است. ثابت کنید می‌توان رنگ  $x$  و  $n + 1$  راس را طوری انتخاب کرد، که از هر یک از این راس‌ها به هر راس دیگری از آنها، بتوان با یال‌های  $x$  مسیری پیدا کرد. (در طول مسیر از راس‌هایی غیر از این  $n + 1$  راس نباید استفاده شود.)



آزمون تئوری تارجان  
۱۱ ام آذر تا ۱۷ ام آذر ماه ۱۴۰۲  
آزمون دوم

Rangi

رنگی (Rangi)

۴.۳  $n \geq 3$  عددی طبیعی است.  $n$  جایگاه دور یک دایره قرار دارند که در هر کدام، یک سنگ قرار دارد. تمام  $n$  های مثبت را بیابید که بتوان با  $n - 2$  بار انجام عملیات زیر، به یک جایگاه با  $n - 1$  سنگ برسیم.

a. یک جایگاه شامل حداقل یک سنگ و یک عدد  $k < n$  را در نظر بگیرید. تمام سنگ‌های دسته‌ی  $k$  تا بعدی در جهت پادساعتگرد را انتخاب کرده، و آن‌ها را در دسته‌ی  $k$  تا بعدی در جهت ساعتگرد جایگاه انتخاب شده قرار دهید.