



آزمون ترکیبی CHMMCJHMTEMCCINTEGIRLS 2

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. یک عدد صحیح مثبت را تقریباً مربع می‌نامیم اگر مربع کامل نباشد، اما همهٔ رقم‌هایش مربع کامل باشند. برای مثال، هر دو عدد ۱۴۹ و ۹۰۴ تقریباً مربع‌اند، اما ۱۴۴ و ۹۳۶ نیستند. تعداد اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر از ۱۰۰۰ را که تقریباً مربع نیستند بیابید.

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۱، بخش دبیرستان، دور ترکیبیات، سؤال ۲

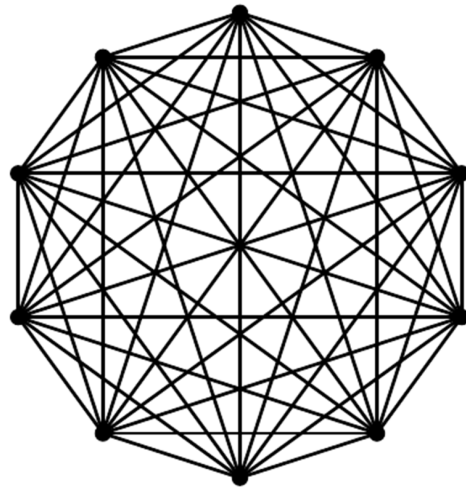
پرسش ۲. فرض کنید S مجموع همهٔ اعداد صحیح مثبت n باشد به طوری که $\frac{3}{5}$ از مقسوم‌علیه‌های مثبت n مضرب ۶ باشند و n هیچ عامل اولی بزرگ‌تر از ۳ نداشته باشد. مقدار S را حساب کنید.

مسابقهٔ ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۲۰، بخش انفرادی، سؤال ۵

پرسش ۳. اندرو بارها یک تاس عادی شش‌وجهی می‌اندازد و در هر لحظه حاصل ضرب همهٔ عددهایی را که تا آن لحظه آورده است محاسبه می‌کند. هرگاه این حاصل ضرب عددی اول باشد، او یک پاک‌کن می‌خورد. احتمال این‌که اندرو هرگز پاک‌کن نخورد چقدر است؟

مسابقهٔ ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، دور گاتس، سؤال ۳

پرسش ۴. جیل ضلع‌ها و قطرهای یک ده‌ضلعی منتظم را رسم می‌کند. سپس خطی مانند l رسم می‌کند که از هیچ‌یک از رأس‌های چندضلعی نمی‌گذرد. بیشترین تعداد ممکن از ضلع‌ها و قطرهای l می‌تواند قطع کند چقدر است؟



مسابقهٔ ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، آزمون سرعت، سؤال ۱۶

پرسش ۵. جیک روی یک صفحهٔ شطرنج ۸ در ۸ یک بازی شرط‌بندی انجام می‌دهد. در هر ثانیه، یک رخ روی یک خانهٔ خالی تصادفی از صفحه قرار داده می‌شود، به شرطی که با هیچ رخ موجودی در یک سطر یا ستون مشترک نباشد. وقتی دیگر نتوان رخی در صفحه قرار داد فرایند متوقف می‌شود. جیک در صورتی برنده می‌شود که همهٔ رخ‌ها روی خانه‌های سیاه باشند. احتمال برد او چقدر است؟

مسابقهٔ ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، دور گاتس، سؤال ۱۳

پرسش ۶. هر یک از ۹ خانهٔ یک شبکهٔ 3×3 با احتمال برابر یا آبی یا سفید رنگ می‌شود. امید ریاضی مساحت بزرگ‌ترین مربع ساخته‌شده از خانه‌های آبی در شبکه را بیابید.

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۱، بخش دبیرستان، دور ترکیبیات، سؤال ۸

پرسش ۷. تعداد پنج‌تایی‌های مرتب $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ از اعداد صحیح مثبت را بیابید به طوری که برای هر اندیس $k = 1, 2, \dots, 5$ داشته باشیم $x_k \leq 6$ و باقی‌مانده تقسیم $x_1 + x_2 + \dots + x_5$ بر ۷ برابر ۱ باشد.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۷، بخش انفرادی، سؤال ۱۰

پرسش ۸. برای یک مجموعه ناتهی A از اعداد صحیح، فرض کنید $\text{range } A = \max A - \min A$. تعداد زیرمجموعه‌های S از

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

را بیابید که $\text{range } S$ عضوی از S باشد.

تورنمنت ریاضی جانز هایپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۲، بخش دبیرستان، دور ترکیبیات، سؤال ۴

پرسش ۹. یک موربانه در نقطه $(0, 0, 0)$ ، در مرکز هشت‌وجهی

$$|x| + |y| + |z| \leq 5$$

قرار دارد. موربانه در هر حرکت فقط می‌تواند به اندازه یک واحد در یک جهت موازی با محورهای x ، y یا z حرکت کند. موربانه چند مسیر متمایز، شامل ۵ گام، می‌تواند طی کند تا به سطح هشت‌وجهی برسد؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۸، بخش انفرادی، سؤال ۷

پرسش ۱۰. در یک اتاق یک نفر حضور دارد. سپس پنجاه نفر دیگر، یکی‌یکی، وارد می‌شوند. هر کسی که وارد اتاق می‌شود، به صورت تصادفی با یکی از افرادی که از قبل در اتاق هستند دوست می‌شود. پس از این‌که همه وارد اتاق شدند، امید ریاضی تعداد افرادی که دقیقاً یک دوست دارند چقدر است؟ هیچ‌کدام از افراد در ابتدا با هم دوست نیستند.

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، آزمون دقت، سؤال ۷

پرسش ۱۱. یک مرکز پژوهشی ۶۰ اتاق دارد که با شماره‌های ۱, ۲, ..., ۶۰ شماره‌گذاری شده و به شکل دایره چیده شده‌اند. ورودی در اتاق ۱ و خروجی در اتاق ۶۰ است و هیچ راه دیگری برای ورود یا خروج از مرکز وجود ندارد. هر اتاق، به جز اتاق ۶۰، یک دورنورد (تله‌پورت) دارد که با یک عدد صحیح $1 \leq i < 60$ تنظیم شده است و مسافر را دقیقاً i اتاق در جهت عقربه‌های ساعت جابه‌جا می‌کند.

روز دوشنبه، یک پژوهشگر یک جایگشت تصادفی از ۱, ۲, ..., ۶۰ تولید می‌کند، به طوری که ۱ نخستین عدد جایگشت و ۶۰ آخرین عدد آن است. سپس دورنوردهای مرکز را طوری تنظیم می‌کند که اتاق‌ها به ترتیب همان جایگشت بازدید شوند.

اما روز سه‌شنبه، یک مجرم سایبری یکی از دورنوردها را به صورت تصادفی انتخاب و هک می‌کند و دستور آن را با انتخاب یک عدد صحیح تصادفی $1 \leq j' < 60$ دوباره تنظیم می‌کند؛ در نتیجه دورنورد هک شده اکنون مسافر را دقیقاً j' اتاق در جهت عقربه‌های ساعت جابه‌جا می‌کند. توجه کنید که ممکن است، دستور دورنورد هک شده نسبت به دوشنبه تغییر نکند. این مسئله خطرناک است، چون ممکن است پژوهشگر، اگر وارد مرکز شود، در یک چرخه بی‌پایان از اتاق‌ها گیر بیفتد.

احتمال این را بیابید که پژوهشگر پس از ورود به اتاق ۱ نتواند از مرکز خارج شود.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۲۰، بخش انفرادی، سؤال ۱۰

پرسش ۱۲. کشور کلاردنا ۵ شهر دارد و قصد دارد سامانه‌ای جاده‌ای بسازد به طوری که هر شهر دقیقاً یک جاده یک‌طرفه خروجی به شهری دیگر داشته باشد. دو سامانه جاده‌ای را معادل می‌دانیم اگر بتوان فقط با تغییر نام شهرها از یکی به دیگری رسید. در کلاردنا، چند سامانه جاده‌ای متمایز و نامعادل می‌تواند ساخته شود؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۷، بخش تیمی، سؤال ۶

پرسش ۱۳. کیت تصمیم می‌گیرد یک دنباله از رقم‌ها را لغزان بنامد اگر عدد دورقمی تشکیل شده از هر دو رقم مجاور در دنباله، بر ۲۳ یا ۱۷ بخش‌پذیر باشد. بیشترین تعداد ممکن رقم‌های ۲ در یک دنباله لغزان با طول ۲۰۲۱ رقم چقدر است؟

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۱، بخش دبیرستان، دور عمومی، سؤال ۳

پرسش ۱۴. یک مسابقه مناظره شامل ۵ دانش‌آموز است که رتبه‌های ۱، ۲، ...، ۵ دارند. پت رتبه‌بندی دانش‌آموزان را نمی‌داند. او به صورت تصادفی و با احتمال برابر، شش جفت دانش‌آموز را انتخاب می‌کند و به او گفته می‌شود در هر جفت، دانش‌آموزی که رتبه بهتری دارد کدام است. توجه کنید که پت، شش جفت متفاوت از دانش‌آموزان را انتخاب می‌کند. احتمال این‌که این اطلاعات به پت اجازه دهد رتبه هر دانش‌آموز را تعیین کند چقدر است؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، دور گاتس، سؤال ۱۴

پرسش ۱۵. فرض کنید N تعداد دنباله‌های $(x_1, x_2, \dots, x_{2018})$ از اعضای نه لزوماً متمایز مجموعه $\{1, 2, \dots, 2019\}$ باشد به طوری که $x_1 + x_2 + \dots + x_{2018}$ بر ۲۰۱۸ بخش‌پذیر باشد. سه رقم آخر N را بیابید.

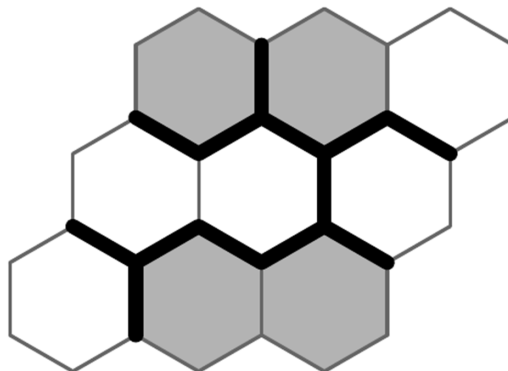
مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۸، بخش انفرادی، سؤال ۱۵

پرسش ۱۶. در شبکه شش‌ضلعی شکل زیر، بعضی از یال‌ها پررنگ شده‌اند و شبکه را به شش ناحیه تقسیم کرده‌اند. هر یک از نه خانه باید با یک عدد صحیح مثبت تک‌رقمی متمایز پر شود، به طوری که:

(۱) هیچ دو عدد متوالی یک یال پررنگ مشترک نداشته باشند؛

(۲) عدد یک‌رقمی یا دورقمی تشکیل‌شده توسط ارقام هر ناحیه، یک عدد اول باشد.

حاصل ضرب رقم‌های چهار خانه سایه‌زده چقدر خواهد بود؟



مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، آزمون دقت، سؤال ۷

پرسش ۱۷. فرض کنید k عددی گویا باشد. سلین در صفحهٔ مختصات، از هر نقطهٔ شبکه‌ای خطی با شیب k رسم می‌کند. اگر دقیقاً ۱۰۰۰ خط متمایز از درون مربعی با رأس‌های $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، $(1,1)$ و $(0,1)$ بگذرند، چند مقدار ممکن برای k وجود دارد؟

مسابقهٔ ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، دور گاتس، سؤال ۲۳

پرسش ۱۸. آریان از هر یک از ۷ طعم مختلف کالپیکو، ۲ بطری یکسان خریده است و قصد دارد از همهٔ آن‌ها بنوشد. او ترتیبی برای نوشیدن از بطری‌های کالپیکوی خود انتخاب می‌کند به طوری که بین هر دو بطری هم‌طعم، حداکثر یک بطری قرار داشته باشد. اگر x تعداد ترتیب‌های ممکن باشد که آریان می‌تواند انتخاب کند، باقیماندهٔ تقسیم x بر ۱۰۰۰ را حساب کنید.

مسابقهٔ ریاضی اینتگرلز پاییز ۲۰۲۵، بخش دبیرستان، آزمون انفرادی، سؤال ۱۵

پرسش ۱۹. فرض کنید P مجموعه‌ای از نه نقطه در صفحهٔ مختصات دکارتی باشد که هیچ سه‌تایی از آن‌ها روی یک خط نیستند. یک ترتیب $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_9\}$ از نقاط P را ویژه می‌نامیم اگر نقطه‌ای مانند C در همان صفحه وجود داشته باشد به طوری که

$$CQ_1 < CQ_2 < \dots < CQ_9.$$

در میان همهٔ مجموعه‌های ممکن P ، بیشترین تعداد ممکن ترتیب‌های ویژهٔ متمایز P چقدر است؟

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۱، بخش دبیرستان، دور ترکیبیات، سؤال ۱۰

پرسش ۲۰. برای n رقم (a_1, a_2, \dots, a_n) با $0 \leq a_i < n$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ و $a_1 \neq 0$ را $(\overline{a_1 a_2 \dots a_n})_n$ برابر عددی تعریف می‌کنیم که رقم‌های a_1, a_2, \dots, a_n در مبنای n آن را می‌سازند. فرض کنید

$$S_n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \mid (n+1) \mid (\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n})_n, a_1 \geq 1\}$$

مجموعهٔ n تایی‌هایی باشد که $(\overline{a_1 a_2 \dots a_n})_n$ بر $n+1$ بخش‌پذیر است.

مجموع همهٔ $n > 1$ هایی را بیابید که n مقسوم‌علیه ۲۰۱۹ + $|S_n|$ باشد.

مسابقهٔ ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۹، بخش انفرادی، سؤال ۱۴