



Lehigh 2016-2022

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. چند طریق می‌توان وجه‌های یک مکعب را با شش رنگ متمایز رنگ‌آمیزی کرد، در صورتی که رنگ‌آمیزی‌هایی که با دوران مکعب بر هم منطبق می‌شوند، یکسان در نظر گرفته شوند؟

Lehigh 2022

پرسش ۲. شصت و چهار دانش‌آموز از ۱ (ضعیف‌ترین) تا ۶۴ (قوی‌ترین) بر حسب توانایی ریاضی رتبه‌بندی شده‌اند، به طوری که رتبه‌ی هیچ دو نفری یکسان نیست. هشت کلوپ با شماره‌های ۱ تا ۸ وجود دارد، به طوری که کلوپ ۸ همان کلوپ ۰ نیز محسوب می‌شود و در هر کلوپ هشت دانش‌آموز حضور دارند. برای هر i از ۱ تا ۸، مسابقه‌ای بین کلوپ i و کلوپ $i-1$ برگزار می‌شود که در آن، هر دانش‌آموز از کلوپ i با تمام دانش‌آموزان کلوپ $i-1$ رقابت می‌کند و همواره دانش‌آموز با رتبه‌ی بالاتر پیروز می‌شود. مشخص شده است که برای تمام مقادیر i (از ۱ تا ۸)، کلوپ i حداقل در K مسابقه در برابر کلوپ $i-1$ پیروز می‌شود. بزرگترین مقدار K که این اتفاق برای آن ممکن است رخ دهد، کدام است؟

Lehigh 2022

پرسش ۳. یک دست در بازی بریج شامل ۱۳ کارت است که به طور تصادفی از یک دسته‌ی ورق ۵۲ تایی استاندارد انتخاب می‌شود. هنگام ارزیابی یک دست، هر کارت «آس» ۴ امتیاز، هر «شاه» ۳ امتیاز، هر «بی‌بی» ۲ امتیاز و هر «سرباز» ۱ امتیاز دارد. با فرض اینکه یک دست دقیقاً چهار کارت از میان کارت‌های آس، شاه، بی‌بی یا سرباز داشته باشد، احتمال اینکه مجموع امتیازات آن دست دقیقاً ۱۳ باشد چقدر است؟

Lehigh 2021

پرسش ۴. در کلاسی با ۱۰۰ دانش‌آموز، ۹۰ نفر اسپانیایی، ۸۰ نفر فرانسوی، ۷۰ نفر آلمانی و ۶۰ نفر ایتالیایی مطالعه می‌کنند. اگر هیچ دانش‌آموزی هر چهار زبان را مطالعه نکند، تعداد دانش‌آموزانی که هم اسپانیایی و هم فرانسوی مطالعه می‌کنند چند نفر است؟

Lehigh 2021

پرسش ۵. کمترین مقدار ممکن عبارت زیر را بیابید، که در آن a ، b و c اعداد صحیح مثبت هستند:

$$\left\lfloor \frac{a+b}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+a}{b} \right\rfloor$$

Lehigh 2021

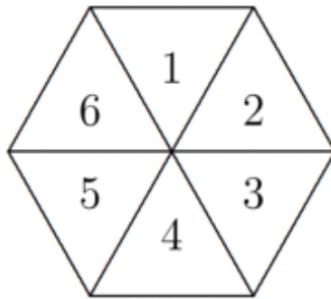
پرسش ۶. فرض کنید $f(k) = \lfloor k/3 \rfloor$. چند عدد صحیح مثبت $n < 1000$ دارای این ویژگی هستند که هیچ‌کدام از مقادیر n ، $f(n)$ ، $f(f(n))$ و $f(f(f(n)))$ بر ۳ بخش‌پذیر نباشند؟

Lehigh 2021

پرسش ۷. چند عدد ۱۰ رقمی می‌توان تنها با استفاده از ارقام ۱، ۲ یا ۳ ساخت، به طوری که تعداد دفعات تکرار رقم ۱ در آن‌ها زوج باشد؟

Lehigh 2021

پرسش ۸. به چند طریق می‌توان پنجره‌ی شش‌ضلعی زیر را رنگ‌آمیزی کرد به گونه‌ای که هر مثلث با یکی از رنگ‌های قرمز، سبز، آبی یا زرد رنگ شود و هیچ دو مثلث مجاور هم‌رنگ نباشند؟

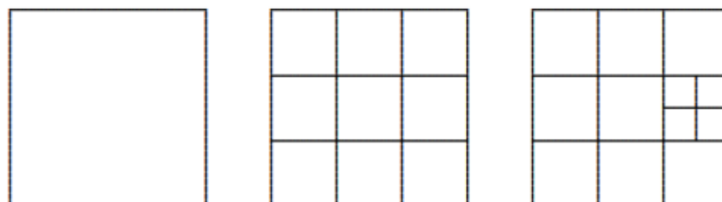


Lehigh 2020

پرسش ۹. یک جدول 3×3 به طور تصادفی با اعداد صحیح ۱ تا ۹ پر شده است، به گونه‌ای که هر یک از این اعداد دقیقاً یک‌بار استفاده شده‌اند. احتمال اینکه مجموع هر سطر فرد و مجموع هر ستون فرد باشد، چقدر است؟

Lehigh 2020

پرسش ۱۰. با یک مربع شروع کنید. هر تعداد مرحله‌ی غیرمنفی دلخواه را انجام دهید؛ در هر مرحله، یکی از زیرمربع‌های موجود را با خطوط افقی و عمودی به n^2 زیرمربع کوچک‌ترِ هم‌نهشت (برای $n \geq 2$) تقسیم کنید. هر دنباله از این مراحل منجر به باقی ماندن تعداد مشخصی مربع می‌شود (در اینجا فقط مربع‌هایی شمرده می‌شوند که مجدداً تقسیم نشده‌اند). مجموع تمام اعداد صحیح مثبتی را بیابید که نمی‌توانند به عنوان تعداد کل مربع‌ها از این طریق حاصل شوند. به عنوان مثال، تصاویر زیر نشان می‌دهند که چگونه مقادیر ۱، ۹ و ۱۲ به دست می‌آیند. توجه داشته باشید که ۲ و ۳ اولین دو عدد صحیحی هستند که نمی‌توان به آن‌ها دست یافت.



Lehigh 2020

پرسش ۱۱. فرض کنید a_n نشان‌دهنده‌ی n -امین کوچک‌ترین عدد صحیح مثبتی باشد که مجموع ارقام آن برابر ۷ است. برای مثال، $a_1 = 7$ ، $a_2 = 16$ و $a_3 = 25$. اگر $a_n = 1006$ باشد، عدد صحیح a_{9n} کدام است؟

Lehigh 2020

پرسش ۱۲. روزی از هفته که یک فرد در آن متولد شده، تصادفی است. تعداد زیادی از افراد، یکی یکی روزی از هفته را که در آن متولد شده‌اند اعلام می‌کنند تا زمانی که برای اولین بار هر هفت روز هفته نام برده شده باشد. امید ریاضی تعداد افرادی را که روز تولد خود را اعلام کرده‌اند تا لحظه‌ای که برای نخستین بار همه‌ی هفت روز هفته ذکر شده باشند، بیابید. فرض کنید احتمال وقوع هر یک از روزها در هر مرحله یکسان است.

Lehigh 2020

پرسش ۱۳. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ باشند که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند (ممکن است با هم برابر باشند). این بدان معناست که انتخاب هر زیرمجموعه‌ای، از جمله مجموعه‌ی تهی و خود مجموعه، شانس یکسانی دارد. احتمال اینکه یکی از این زیرمجموعه‌ها شامل دیگری باشد چقدر است؟ (این حالت شامل مواردی که دو مجموعه با هم برابرند نیز می‌شود و هر یک از دو مجموعه می‌تواند مجموعه‌ی دربرگیرنده باشد).

Lehigh 2019

پرسش ۱۴. تابعی مانند $f(m, n)$ در شرایط $f(1, n) = n$ و $f(n, 1) = 1$ صدق می‌کند و برای هر $m, n \geq 2$ داریم $f(m, n) = f(m-1, n)f(m, n-1)$. بزرگترین عدد صحیح k را بیابید که به‌ازای آن 3^k عدد $f(9, 9)$ را عاَد کند (یعنی $f(9, 9)$ بر 3^k بخش‌پذیر باشد).

Lehigh 2019

پرسش ۱۵. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a_1, a_2, a_3) از اعداد صحیح متمایز را بیابید که در آن‌ها برای هر $i \in \{1, 2, 3\}$ شرط $|a_i| \leq 10$ برقرار باشد و همچنین $a_1 + a_2 + a_3 > 0$ باشد.

Lehigh 2019

پرسش ۱۶. بزرگ‌ترین عدد صحیحی را بیابید که در آن هر رقم، به‌جز اولین و آخرین رقم، اکیداً کوچک‌تر از میانگین حسابی دو رقم همسایه‌اش باشد.

Lehigh 2019

پرسش ۱۷. چند عدد ۶ رقمی که رقم سمت چپ آن‌ها ۱ است، دقیقاً دارای دو جفت رقم یکسان هستند (و هیچ رقمی سه بار یا بیشتر تکرار نشده است)؟

Lehigh 2018

پرسش ۱۸. هشت نفر از سه خانواده به طور تصادفی دور یک میز گرد می‌نشینند. دو خانواده دارای سه عضو و خانواده‌ی دیگر دارای دو عضو است. احتمال اینکه هر فرد حداقل در کنار یک نفر از خانواده‌ی غیر از خانواده‌ی خودش نشسته باشد چقدر است؟

Lehigh 2018

پرسش ۱۹. فرض کنید \mathcal{P} نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های $\{a, b, c\}$ ، شامل مجموعه‌ی تهی باشد. چند تابع f از \mathcal{P} به \mathcal{P} وجود دارد که برای تمام A و B در \mathcal{P} ، در شرط $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ صدق کنند؟

Lehigh 2016

پرسش ۲۰. در یک دنباله از ۰ها و ۱ها، یک «بلوک» به صورت رشته‌ای از ۰های متوالی یا ۱های متوالی تعریف می‌شود؛ این تعریف شامل بلوک‌هایی به طول ۱ نیز می‌گردد. برای مثال، دنباله ۰۰۱۰۰۰۱۱ دارای چهار بلوک است. در یک دنباله تصادفی شامل ۱۵ صفر و ۹ یک، میانگین (یا امید ریاضی) تعداد بلوک‌ها چقدر است؟

Lehigh 2016