



PUMaC 2013

- مدت زمان آزمون ۲٫۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. به چند طریق می‌توان حروف a, b, c و اعداد $۱, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ را پشت هم چید به طوری که هیچ دو حرفی پشت هم نیایند و هیچ سه عددی نیز پشت هم نیایند؟

PUMaC 2013 B#1

پرسش ۲. تعداد زوج مرتب‌های (a, b) که a مقسوم علیه b باشد و b نیز مقسوم علیه $۲۰۱۳^{۲۰۱۴}$ باشد را در نظر بگیرید. باقی‌مانده‌ی حاصل به ۲۰۱۳ چند است؟

PUMaC 2013 B#2

پرسش ۳. اضلاع یک پنج ضلعی منتظم را امتداد دادیم تا همدیگر را در ۱۰ نقطه قطع کنند (از جمله خود رئوس پنج ضلعی). به چند روش می‌توان ۵ نقطه از این ۱۰ نقطه را انتخاب کرد تا هیچ سه تایی از آن‌ها هم خط نباشند؟

PUMaC 2013 A#1

پرسش ۴. به چند روش می‌توان یال‌های یک شش‌ضلعی منتظم را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرد که نسبت به چرخش متمایز باشند؟

PUMaC 2013 A#2

پرسش ۵. یک قورباغه می‌تواند به بالا و راست بپرد. او می‌خواهد به خانه‌اش برود و برای این کار به ۳ پرش به راست و ۱۰ پرش به بالا نیاز دارد. اما یک مار در موقعیتی قرار دارد که از آنجا به خانه‌ی قورباغه، به اندازه‌ی ۲ پرش به راست و ۴ پرش به شمال فاصله دارد. چند مسیر مختلف وجود دارد که قورباغه بتواند به خانه‌اش برسد، به طوری که از محل مار عبور نکند؟

PUMaC 2013 B#3

پرسش ۶. یک ورزشکار می‌خواهد پنج وعده غذا بخورد. صبحانه، میان‌وعده، ناهار، عصرانه و شام. هر وعده چهار حالت دارد که یا هم پروتئین داشته باشد و هم ویتامین، فقط پروتئین داشته باشد، فقط ویتامین داشته باشد و یا هیچ کدام را نداشته باشد. او به چند طریق می‌تواند وعده‌هایش را برنامه‌ریزی کند به طوری که هم پروتئین مصرف کرده باشد و هم ویتامین؟

PUMaC 2013 B#7

پرسش ۷. سه تاس را می‌اندازیم. اگر بدانیم بالاترین عددی که ظاهر شده است ۵ است، امید ریاضی مجموع اعداد چند است؟

PUMaC 2013 A#4

پرسش ۸. چند دنباله مانند a_1, a_2, \dots, a_n وجود دارد که $a_1 = 0$ و به ازای هر i داشته باشیم $a_i \leq 10$ و $a_{i+1} - a_i \geq 2$ ؟

PUMaC 2013 B#6

پرسش ۹. تیم آبی و قرمز در حال مسابقه دادن هستند. بازی هرگز مساوی نمی‌شود و به محض اینکه یک تیم به ۳ پیروزی برسد، بازی تمام می‌شود. اگر شانس پیروز شدن تیم آبی در هر بازی $0 \leq x \leq 1$ باشد، امید ریاضی تعداد بازی‌های برگزار شده را می‌توان به صورت یک تابع چند جمله‌ای بر حسب x نوشت. اگر این تابع را با f نشان دهیم، $f(-1)$ را بیابید.

PUMaC 2013 A#7

پرسش ۱۰. تعداد چندتایی‌های مرتب صحیح $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ را بیابید، به طوری که برای هر i داشته

باشیم

$۱ \leq a_i \leq ۵$ و همچنین $a_۰ < a_۱ > a_۲ < a_۳ > a_۴$.

PUMaC 2013 A#3

پرسش ۱۱. در یک تورنومنت شطرنج، n دختر و $۲n$ پسر شرکت می‌کنند. هر دو نفر دقیقاً یک بار با هم بازی کرده‌اند و می‌دانیم هیچ بازی‌ای مساوی نشده است. اگر تعداد بازی‌هایی که برنده‌ی آن دختر بوده، $\frac{۷}{۵}$ تعداد بازی‌هایی باشد که برنده‌ی آن پسر بوده، n چند بوده است؟

PUMaC 2010 A#5

پرسش ۱۲. به یک دنباله از رئوس مانند v_1, v_2, \dots, v_k گردش می‌گوییم اگر v_1 به v_k یال داشته باشد و هر v_i نیز به v_{i+1} یال داشته باشد. تفاوت گردش با دور این است که گردش‌ها را تحت بازتاب و دوران متمایز در نظر می‌گیریم. به طور مثال ABC, ACB, BCA دوه‌دو متمایزند. یک گراف با ۲۰۱۳ راس و ۳۰۱۳ یال، حداقل چند گردش دارد؟

PUMaC 2013 A#6

پرسش ۱۳. هشت نفر دور یک میز دایره‌ای نشسته‌اند به طوری که تشکیل یک ۸ضلعی منتظم می‌دهند (منظور این است که فاصله‌ی آن‌ها از هم برابر است). هشت سوییچ هم به طور منظم (کمان بین هر دو سوییچ متوالی ۴۵ درجه است) روی محیط این میز قرار دارد که هر کدام برای یکی از ۸ نفر است. می‌دانیم هر طور میز را بچرخانیم، هرگز بیش از ۳ نفر در مقابل سوییچ خود قرار نمی‌گیرد. به چند طریق مختلف ممکن است سوییچ‌ها روی میز باشند؟ حالتی که با چرخش به هم تبدیل می‌شوند، یکسان محسوب می‌شوند.

PUMaC 2013 A#8

پرسش ۱۴. فرض کنید پنج جعبه‌ی سبز در یک ردیف هستند و تعداد زیادی جعبه‌ی آبی و قرمز نیز در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان این جعبه‌ها را روی جعبه‌های سبز گذاشت (خود پنج جعبه‌ی اولیه هم یک حالت مطلوب است) به طوری که هر جعبه دقیقاً روی دو جعبه قرار بگیرد؟ (یعنی پایین راست و پایین چپ هر جعبه‌ای که می‌گذاریم، یک جعبه باشد. چیزی شبیه به مثلث.)

PUMaC 2013 A#5

پرسش ۱۵. چه تعداد دستبند متمایز وجود دارد که دارای ۷ مهره باشند و هر مهره بتواند به یکی از سه رنگ سیاه، نارنجی و زرد باشد؟

PUMaC 2009 A#8