



PUMaC 2011-2012

- مدت زمان آزمون ۲٫۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. به چند روش می‌توان حروف کلمه‌ی «گلابی» را کنار هم قرار داد به طوری که حروف مصوت کنار هم نباشند؟

PUMaC 2011 B#1

پرسش ۲. حاصل جمع $abc + de$ را در نظر بگیرید. اگر تمام ارقام، اعدادی متمایز بین ۱ تا ۵ باشند (شامل ۱ و ۵)، حاصل چند مقدار مختلف ممکن است اختیار کند؟

PUMaC 2011 A#1

پرسش ۳. یک نفر در یک امتحان ۸ سواله که بارم نمرات آن‌ها $\{۳, ۳, ۴, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ بوده، ۲ سوال را به طور تصادفی درست حل کرده است. اگر شانس حل شدن سوالات با هم برابر باشد، امید ریاضی مجموع نمره‌ی او از این دو سوال چقدر است؟

PUMaC 2012 B#1

پرسش ۴. به چه احتمالی مجموع سه عدد متمایز بین ۱۶ و ۳۰ (شامل ۱۶ و ۳۰) زوج خواهد بود؟

PUMaC 2012 A#1

پرسش ۵. به چند روش می‌توان ۶ جایگشت اعداد ۱ تا ۳ را مرتب کرد به طوری که هر جایگشت با جایگشت بعدی، دقیقاً در یک جایگاه برابر باشد؟ به طور مثال حالت زیر، یک حالت معتبر است.

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 3, 1), (2, 1, 3)$$

PUMaC 2012 A#2

پرسش ۶. به یک تابع مانند f از $\{1, 2, \dots, n\}$ به $\{1, 2, \dots, m\}$ حافظ ضرب می‌گوییم اگر به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ که $ij \leq n$ داشته باشیم $f(i)f(j) = f(ij)$. تعداد توابع یک‌به‌یک حافظ ضرب از $\{1, 2, \dots, 9\}$ به $\{1, 2, \dots, 88\}$ را بیابید. (جواب به صورت تجزیه‌ی عوامل اول باشد)

PUMaC 2011 B#4

پرسش ۷. n دومینو داریم که هرکدام یک خانه‌ی سیاه و یک خانه‌ی سفید دارند. می‌خواهیم با آن‌ها یک جدول $2 \times n$ را پر کنیم. اگر $n = 6$ ، رنگ خانه‌ها به چند حالت ممکن است باشد؟ (برای $n = 6$ حالت ممکن است)

PUMaC 2011 A#2

پرسش ۸. به چند روش می‌توان ۴ مهره‌ی فیل را در یک جدول 5×5 قرار داد به طوری که هیچ سه‌تایی به صورت مورب در یک راستا نباشند؟ (منظور از مورب، جهت‌هایی است که فیل‌ها حرکت می‌کنند). جواب را به پیمانه‌ی ۱۰۰ حساب کنید.

PUMaC 2011 A#4

پرسش ۹. دو تاس داریم که یکی دارای اعداد ۱ تا ۶ است و دیگری دارای اعداد ۳ تا ۸. شخصی دوبار، هر بار به احتمال برابر، یکی از این دو تاس را برمی‌دارد و آن را می‌اندازد. اگر بدانیم مجموع اعداد تاس در این دو بار، برابر ۹ بوده، شخص به چه احتمالی هر دو بار یک تاس را انتخاب کرده است؟

PUMaC 2012 A#3

پرسش ۱۰. فرض کنید ماکسیمم اعضای مجموعه‌ی S را با $\max(S)$ نشان دهیم. چند زیرمجموعه‌ی ناتهی از $\{1, 2, \dots, 10\}$ مانند S وجود دارند به طوری که $\max(S) \leq |S| + 2$ ؟

پرسش ۱۱. ۵ نفر در یک صف ایستاده‌اند. در هر مرحله، جلوترین فرد، با احتمال برابر، یکی از ۵ جایگاه صف (از جمله جلو یا عقب صف) را انتخاب می‌کند و به آنجا می‌رود. مثلاً اگر صف به صورت A, B, C, D, E باشد و نفر جلویی (A) بخواهد به جایگاه سوم صف برود، صف به این شکل خواهد شد B, C, A, D, E . امید ریاضی تعداد مراحل که لازم است تا نفر آخر صف به جلوی صف برسد را بیابید.

پرسش ۱۲. چند مجموعه از نقاط مانند $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ (مجموعه‌ی تهی نیز مورد قبول است) وجود دارند به طوری که به ازای هر i ، $P_i = (x_i, y_i)$ که $x_i, y_i \in \{0, 1, \dots, 6\}$ ؛ همچنین به ازای هر $1 \leq i < j \leq m$ شیب خط واصل P_i و P_j مثبت باشد (شیب بی‌نهایت مورد قبول نیست).

پرسش ۱۳. دو هرم با قاعده‌های پنج‌ضلعی داریم که طول هر کدام از یال‌های آن‌ها یک متر است. این دو هرم را از قاعده‌های آن‌ها به هم می‌چسبانیم تا یک شکل هندسی ۱۰وجهی به وجود بیاید. به چند حالت متمایز می‌توان این ۱۰وجه را با سیاه و سفید رنگ‌آمیزی کرد؟

پرسش ۱۴. یک سامانه‌ی تصحیح سوالات می‌خواهد پاسخنامه‌های یک آزمون ۳ سواله که در آن ۴۰ نفر شرکت کرده‌اند را تصحیح کند. شرکت‌کنندگان با شماره‌های ۱ تا ۴۰ شماره‌گذاری شده‌اند. این سامانه بعد از تصحیح پاسخ یک سوال از فرد i ام، می‌تواند یا پاسخ فرد $i - 1$ ام یا $i + 1$ ام (به ترتیب در صورتی که $i > 1$ و $i < 40$) به همان سوال را تصحیح کند و یا یک سوال دیگر از همین فرد i ام را بررسی کند. اگر بدانیم اولین و آخرین پاسخ‌هایی که سامانه بررسی می‌کند به ترتیب سوال اول فرد ۱ام و سوال سوم فرد ۴۰ام است و هرکدام از این ۱۲۰ پاسخ دقیقاً یک بار بررسی می‌شوند، سوال‌ها به چند ترتیب مختلف ممکن است تصحیح شده باشند؟ جواب را به پیمان‌هی ۱۰۰ به دست بیاورید.

پرسش ۱۵. ابتدا ۹۰ نفر در یک اتاق قرار دارند. در هر دقیقه یا یک نفر خارج می‌شود و یا یک نفر وارد می‌شود. می‌دانیم بعد از ۲۰۰ دقیقه دقیقاً ۱۰۰ نفر وارد و ۱۰۰ نفر خارج شده‌اند. همچنین می‌دانیم در طول این ۲۰۰ دقیقه، جمعیت اتاق به ۱۰۰ نفر رسیده اما هرگز از آن بیشتر نشده است. اگر n تعداد ترتیب‌های ممکن برای ورود و خروج افراد باشد (فقط عمل وارد شدن یا خارج شدن مهم است و اینکه چه کسی وارد یا خارج شده اهمیتی ندارد)، تعداد عوامل ۲ موجود در n را بیابید.

PUMaC 2011 A#7