



PUMaC 2009-2010

- مدت زمان آزمون ۲٫۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. یک رستوران پنج غذا در منوی خود دارد. اگر چهار مشتری هر کدام به طور تصادفی یک غذا انتخاب کند، به چه احتمالی نفر چهارم چیزی را انتخاب می‌کند که هیچ فرد دیگری انتخاب نکرده است؟

PUMaC 2010 A#1 (also B#2)

پرسش ۲. سه شخص با لباس‌های آبی و قرمز و سبز در حال پاس دادن یک توپ به همدیگر هستند و در ابتدا توپ زیر پای شخص آبی‌پوش است. به چند روش می‌توانند ۷ بار پاس بدهند به طوری که در نهایت توپ دوباره به شخص آبی‌پوش برسد؟

PUMaC 2009 B#1

پرسش ۳. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 7\}$ که دارای هیچ دو عدد متوالی‌ای نیستند را بیابید.

PUMaC 2009 A#1 (also B#2)

پرسش ۴. منظور از \underline{abc} عددی سه رقمی است که ارقام آن به ترتیب a ، b و c اند. به طور مشابه \underline{ab} عددی دو رقمی با این ارقام است. چه تعداد عدد سه رقمی با ارقام ناصفر مانند \underline{abc} وجود دارد به طوری که داشته باشیم $\underline{ab} > \underline{bc} > \underline{ca}$ ؟

PUMaC 2010 A#2 (also B#3)

پرسش ۵. یک ترازوی دولبه به همراه k وزنه با وزن‌های صحیح داریم. می‌دانیم به کمک این ترازو و

وزنه‌ها می‌توان تمام وزن‌های صحیح ۱ تا ۲۰۰۹ (از جمله دو سر بازه) را اندازه‌گیری کرد. کوچک‌ترین k را بیابید که بتوان چنین کاری را انجام داد.

PUMaC 2009 A#2 (also B#3)

پرسش ۶. چه تعداد دنباله به طول ۱۰، متشکل از صفر و یک وجود دارد به طوری که تعداد یک‌های آن زوج باشد و هیچ دو صفری متوالی نباشند؟

PUMaC 2009 A#3 (also B#4)

پرسش ۷. یک جدول ۶×۶ داریم. فرض کنید n بیشترین تعداد مهره‌ی رخ باشد که می‌توان در این جدول گذاشت به طوری که هر رخ حداکثر یک رخ دیگر را تهدید کند. به چند روش می‌توان n رخ را در این جدول گذاشت تا هر رخ حداکثر یک رخ دیگر را تهدید کند؟

PUMaC 2010 A#5 (also B#7)

پرسش ۸. یک دایره، یک مستطیل و یک مثلث در اختیار داریم و می‌خواهیم به کمک آن‌ها صفحه را به تعدادی ناحیه تقسیم کنیم. حداکثر صفحه را به چند ناحیه می‌توانیم تقسیم کنیم؟

PUMaC 2009 A#4 (also B#5)

پرسش ۹. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰ را پشت سر هم بنویسیم به طوری که اولین عدد ۱ و آخرین عدد ۱۰ باشد. همچنین دقیقاً یکی از هشت عدد دیگر، از هر دو عددی که دقیقاً قبل و بعد از آن آمده‌اند، کمتر باشد. این کار به چند روش ممکن است؟

PUMaC 2010 A#7 (also B#8)

پرسش ۱۰. با داشتن ۶ دایره، صفحه را به حداکثر چند ناحیه می‌توان تقسیم کرد؟

PUMaC 2010 A#3 (also B#4)

پرسش ۱۱. یک فرد در خانه‌ی سطر دوم (از بالا به پایین) و ستون دوم (از چپ به راست) یک جدول ۵×۵ قرار دارد. در هر یک از خانه‌های بالا چپ و پایین راست جدول یک اسکناس ۱ دلاری و در هر یک از

خانه‌های بالا راست و پایین چپ جدول یک اسکناس ۵ دلاری وجود دارد. این فرد در هر حرکت به طور تصادفی به یکی از خانه‌های مجاور ضلعی خود می‌رود و به محض رسیدن به خانه‌ای که در آن اسکناس وجود دارد، آن را برمی‌دارد و متوقف می‌شود. امید ریاضی میزان پولی که به دست می‌آورد چند است؟

PUMaC 2010 A#4

پرسش ۱۲. در یک تورنومنت n تیم وجود دارند. تعدادی مسابقه بین آن‌ها برگزار شده به طوری که بین هر دو تیم حداکثر یک مسابقه انجام گرفته. می‌دانیم وجود دارد k که بین هر زیرمجموعه‌ی $n - 2$ عضوی از این تیم‌ها، 3^k مسابقه برگزار شده است. مجموع مقادیری که n می‌تواند اختیار کند را بیابید.

PUMaC 2009 A#5 (also B#6)

پرسش ۱۳. یک مربع 6×6 داریم که آن را به ۳۶ مربع کوچک تقسیم کرده‌ایم. حداکثر چند قطر از این مربع‌های کوچک را می‌توان رسم کرد به طوری که هیچ دو قطری با هم نقطه‌ی اشتراک نداشته باشند؟

PUMaC 2009 A#6 (also B#7)

پرسش ۱۴. فرض کنید پنج عدد متمایز بین ۱ تا ۹۰ انتخاب کنیم. اگر اعداد انتخاب شده را به ترتیب کوچک به بزرگ مرتب کنیم، امید ریاضی عدد چهارم چند است؟

PUMaC 2009 A#7 (also B#8)

پرسش ۱۵. یک پنج ضلعی منتظم داریم که تمام وترها و اضلاع آن امتداد داده شده‌اند و صفحه را به ۳۶ ناحیه تقسیم کرده‌اند (۲۰ تا از آن‌ها بی‌کران‌اند). یک مورچه در ابتدا در ناحیه‌ی مرکزی این پنج ضلعی است. او هر بار یکی از اضلاع ناحیه‌ای که در آن است را انتخاب کرده و از آن عبور می‌کند تا به ناحیه‌ی مجاور برود. اگر وارد یکی از ناحیه‌های بی‌کران بشود، درجا نابود می‌شود. امید ریاضی تعداد دفعاتی که مورچه بعد از اولین بار خارج شدن از ناحیه مرکزی به آن برمی‌گردد را بیابید.

PUMaC 2010 B#6