



Lehigh 2013-2015

- مدت زمان آزمون ۲/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. چند عدد صحیح مثبت کوچکتر از ۱۲۰۰ وجود دارد که در نمایش دهدهی آن‌ها هیچ رقمی بیش از یک بار ظاهر نشود؟ به بیان دیگر، تمام رقم‌های عدد باید متمایز باشند.

Lehigh 2013

پرسش ۲. شخصی شش گام برمی‌دارد. در هر گام، با احتمال $\frac{1}{3}$ یک واحد به جلو و با احتمال $\frac{1}{3}$ یک واحد به عقب حرکت می‌کند. احتمال آن‌که پس از پایان شش گام دوباره به نقطه شروع بازگردد را بیابید.

Lehigh 2013

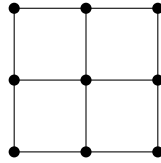
پرسش ۳. فرض کنید برای هر فرد، احتمال داشتن دقیقاً یک فرزند برابر $\frac{1}{3}$ ، احتمال داشتن دقیقاً دو فرزند برابر $\frac{1}{3}$ و احتمال داشتن دقیقاً سه فرزند برابر $\frac{1}{3}$ باشد. همچنین فرض کنید تعداد فرزندان افراد مستقل از یکدیگر تعیین می‌شود. احتمال آن‌که یک فرد در مجموع دقیقاً چهار نوه داشته باشد را محاسبه کنید.

Lehigh 2013

پرسش ۴. فرض کنید A مجموعه ۲۶ حرف الفبای انگلیسی باشد. زیرمجموعه‌ای به نام B از A انتخاب شده است، به طوری که دقیقاً $\frac{5}{8}$ تمام زیرمجموعه‌های A با B اشتراک ناتهی دارند. تعداد اعضای مجموعه B را بیابید.

Lehigh 2015

پرسش ۵. حشره‌ای از یکی از رأس‌های گوشه‌ای گراف زیر آغاز می‌کند. در هر مرحله، یکی از یال‌های مجاور رأس فعلی را با احتمال مساوی انتخاب کرده و روی آن حرکت می‌کند. این فرایند تا زمانی ادامه می‌یابد که حشره برای نخستین بار به رأس مرکزی برسد.



امید ریاضی تعداد گام‌های لازم تا اولین رسیدن به رأس مرکزی را محاسبه کنید.

Lehigh 2013

پرسش ۶. در میان تمام اعداد صحیح مثبت n که دقیقاً 2107 مقسوم‌علیه مثبت دارند، بیشترین مقدار ممکن برای تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n^2 را بیابید.

Lehigh 2013

پرسش ۷. کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت را بیابید که نتوان آن را به صورت مجموع حداکثر ۱۱ فاکتوریل نوشت.

توجه کنید که فاکتوریل‌های به‌کاررفته لزوماً متمایز نیستند و استفاده چندباره از یک فاکتوریل مجاز است.

Lehigh 2013

پرسش ۸. فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر از ۲۵ باشد، به طوری که هیچ دو عضو متمایز آن مقسوم‌علیه مشترکی بزرگ‌تر از ۱ نداشته باشند. بیشترین تعداد اعضای ممکن مجموعه S را بیابید.

Lehigh 2014

پرسش ۹. تام، دیک و هری تنیس بازی می‌کنند. پس از هر بازی، بازنده کنار می‌رود و نفر سوم جای او را می‌گیرد.

در پایان روز، تام ۲۷ بازی و دیک ۱۳ بازی انجام داده‌اند. هری چند بازی انجام داده است؟

Lehigh 2014

پرسش ۱۰. کمترین تعداد ممکن دانش‌آموزان یک کلاس را بیابید، اگر درصد دختران کلاس کمتر از ۵۰٪ و در عین حال حداقل ۴۷٪ باشد.

Lehigh 2014

پرسش ۱۱. چند رشتهٔ دودویی ۱۰ رقمی وجود دارد که در آن‌ها هیچ دو صفر متوالی ظاهر نشوند؟

Lehigh 2014

پرسش ۱۲. پنج نامه برای پنج نفر مختلف نوشته شده و پنج پاکت متناظر نیز آماده شده است. به چند روش می‌توان نامه‌ها را در پاکت‌ها قرار داد، به طوری که هیچ نامه‌ای در پاکت صحیح خود قرار نگیرد؟

Lehigh 2014

پرسش ۱۳. شاهی روی یک صفحهٔ شطرنج 5×5 از خانهٔ بالا-چپ به خانهٔ پایین-راست حرکت می‌کند. در هر حرکت فقط یکی از سه کار زیر مجاز است:

- یک خانه به راست،
- یک خانه به پایین،
- یک خانه به صورت قطری (هم‌زمان یک خانه به راست و یک خانه به پایین).

شاه باید دقیقاً ۶ حرکت انجام دهد و اجازهٔ بازگشت به عقب ندارد.

چند مسیر ممکن وجود دارد؟

Lehigh 2015

پرسش ۱۴. هر یک از دو ظرف شامل N توپ است. توپ‌ها فقط به دو رنگ قرمز و سیاه هستند و در هر ظرف دست‌کم یک توپ از هر رنگ وجود دارد.

ظرفی را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم و سپس یک توپ از آن برمی‌داریم و آن را دوباره به ظرف برمی‌گردانیم. این کار را یک بار دیگر تکرار می‌کنیم.

کوچک‌ترین مقدار N را بیابید که بتوان چیدمانی از توپ‌ها پیدا کرد به‌طوری‌که احتمال انتخاب دو توپ قرمز از ظرف اول با احتمال انتخاب دو توپ هم‌رنگ، یعنی دو قرمز یا دو سیاه، از ظرف دوم برابر باشد.

Lehigh 2014

پرسش ۱۵. سکه‌ای سالم را n بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید $P(n)$ احتمال آن باشد که در میان نتایج، دست‌کم سه شیر متوالی ظاهر شود.

کوچک‌ترین مقدار n را بیابید که برای آن $P(n) \geq \frac{1}{4}$.

Lehigh 2015