



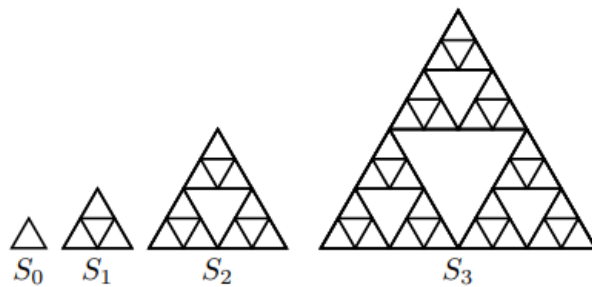
## PUMaC 2024, 2025

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

**پرسش ۱.** بن و کانر وال بال بازی می‌کنند. اولین بازیکنی که ۲ امتیاز از حریف خود جلو بیفتد برنده می‌شود. فرض کنید بن هر دست را به احتمال  $\frac{3}{4}$  می‌برد و از روی جوانمردی‌اش اجازه می‌دهد کانر بازی را با یک امتیاز برتری شروع کند. اگر احتمال برد بن برابر با  $\frac{m}{n}$  باشد که در آن  $m$  و  $n$  اعداد صحیح و نسبت به هم اولند، مقدار  $m + n$  را محاسبه کنید.

PUMaC 2024

**پرسش ۲.** مثلث‌های سیرپینسکی رسم شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.  $S_0$  یک مثلث واحد است و هر  $S_{n+1}$  از کنار هم قرار گرفتن سه نسخه از  $S_n$  تشکیل می‌شود. یک پاره‌خط بیشینه در رسم  $S_k$  به پاره‌خطی گفته می‌شود که نتوان با شرط باقی ماندن در  $S_k$  آن را در همان راستا امتداد داد. به عنوان مثال،  $S_0$  سه پاره‌خط بیشینه و  $S_1$  شش پاره‌خط بیشینه دارد.  $S_5$  چند پاره‌خط بیشینه دارد؟



PUMaC 2024

**پرسش ۳.** آرنی ۲۰ عدد حقیقی را به طور مستقل و به احتمال برابر از بازه‌ی  $[0, 1]$  انتخاب می‌کند. می‌دانیم که بزرگ‌ترین عددی که آرنی انتخاب کرده دقیقاً برابر با  $\frac{19}{p}$  است. می‌توان امید ریاضی مجموع ۲۰ عدد انتخاب شده را به شکل  $\frac{m}{n}$  نوشت که در آن  $m$  و  $n$  اعداد صحیح و نسبت به هم اولند.  $m + n$  را محاسبه کنید.

PUMaC 2024

**پرسش ۴.** جوزف جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ را به صورت تصادفی با احتمال برابر انتخاب می‌کند. سپس از چپ به راست روی جایگشت حرکت می‌کند و هر عددی که بزرگ‌ترین عدد دیده شده تا به آن لحظه نباشد حذف می‌کند. به عنوان مثال اگر جایگشت ۶, ۱, ۵, ۴, ۲, ۳ را انتخاب کرده باشد، اعداد ۲ و ۱ را حذف می‌کند و جایگشت نهایی برابر با ۶, ۵, ۴, ۳ خواهد بود. می‌توان امید ریاضی تعداد اعداد باقیمانده را به شکل  $\frac{m}{n}$  نوشت که در آن  $m$  و  $n$  اعداد صحیح و نسبت به هم اولند.  $m + n$  را محاسبه کنید.

PUMaC 2024

**پرسش ۵.** مایکل و استیون با یک دسته کارت ۴ تایی شماره‌گذاری شده از ۱ تا ۴ بازی کاردی جنگ را انجام می‌دهند. دسته کارت به صورت تصادفی بر زده می‌شود. مایکل یک دسته شامل یک کارت و استیون یک دسته شامل سه کارت دریافت می‌کند. در هر نوبت، هر بازیکن کارت بالایی دسته‌ی خود را رو می‌کند و بازیکنی که کارت با عدد بزرگ‌تر را داشته باشد هر دو کارت را برنده می‌شود. این کارت‌ها با یک ترتیب تصادفی به پایین دسته‌ی کارت‌های او اضافه می‌شوند. هر بازیکنی که بتواند هر چهار کارت را در دست خود جمع کند برنده می‌شود. می‌توان احتمال برد مایکل بعد از دقیقاً ۵ دست را به شکل  $\frac{m}{n}$  نوشت که در آن  $m$  و  $n$  اعداد صحیح و نسبت به هم اولند.  $m + n$  را محاسبه کنید.

PUMaC 2024

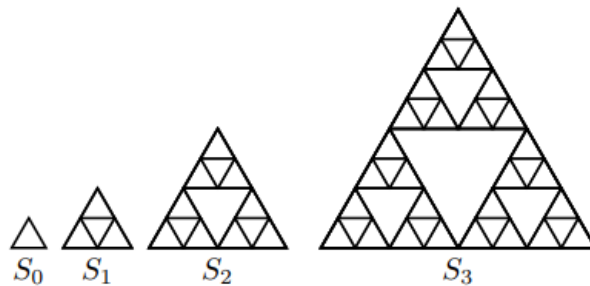
**پرسش ۶.** سال انتخابات در پوماکلند است و ۲۷ نفر در انتخابات ریاست جمهوری به یک نفر بین وراج پاتل و ودانت شاه رای می‌دهند. هر رای‌دهنده به طور تصادفی و با احتمال برابر یک نامزد را انتخاب می‌کند و برگه‌های رای از ۱ تا ۲۷ شماره‌گذاری شده‌اند. انتخابات در چند مرحله برگزار می‌شود. در هر مرحله برگه‌های باقیمانده بر اساس شماره مرتب شده و به گروه‌های سه تایی متوالی تقسیم می‌شوند. در هر گروه کسی که بیشترین رای را آورده برنده می‌شود و دقیقاً یک برگه با نام او به مرحله بعدی راه پیدا می‌کند. این فرآیند تا زمانی که فقط یک برگه باقی بماند ادامه پیدا می‌کند و کسی که نامش روی برگه‌ی نهایی نوشته شده برنده‌ی انتخابات است. آلیس، باب و کارول به ترتیب برگه‌های شماره یک، پانزده و ۲۷ را ثبت کرده‌اند. فرض کنید هر سه‌ی آن‌ها رای خود را عوض کنند، اگر احتمال تغییر نتیجه‌ی انتخابات با تغییر رای آن‌ها برابر با  $\frac{a}{b}$  باشد که در آن  $a$  و  $b$  اعداد صحیح و نسبت به هم اولند، مقدار  $a + b$  را پیدا کنید.

PUMaC 2024

**پرسش ۷.** ازی روی محیط یک شش‌ضلعی منتظم حرکت می‌کند. روی هر راس این شش‌ضلعی دستوری نوشته شده که به او می‌گوید ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد حرکت کند. هر بار که او از یک راس خارج می‌شود دستور نوشته شده روی آن برعکس می‌شود. (از ساعت‌گرد به پادساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد به ساعت‌گرد) می‌گوییم ترکیب  $C$  متشکل از جایگاه ازی و دستورات نوشته شده روی راس‌ها **تکرارنشده‌ی** است اگر با شروع از ترکیب  $C$  خود این ترکیب در ادامه تعداد متناهی بار تکرار شود. تعداد ترکیب‌های تکرارنشده‌ی را بیابید.

PUMaC 2024

**پرسش ۸.** گراف مثلث سیرپینسکی ( $S_n$ ) را به این شکل تعریف می‌کنیم:  $S_0$  از سه راس و سه یال به فرم یک مثلث تشکیل شده است.  $S_1$  از ۶ راس و ۹ یال تشکیل شده. برای ساخت  $S_{n+1}$  سه کپی از  $S_n$  گرفته و راس‌های گوشه‌ای آن‌ها را با هم ادغام می‌کنیم. مثلاً گوشه‌ی پایین-چپ نسخه‌ی بالایی با گوشه‌ی بالایی نسخه‌ی پایین چپ یکی می‌شود و به همین ترتیب برای رؤس گوشه‌ای دیگر. تعداد دوره‌های موجود در  $S_4$  که هر راس را دقیقاً یک بار می‌بینند و از هر یال حداکثر یک بار رد می‌شوند را می‌توان به صورت  $p_1^{e_1} p_2^{e_2}$  نوشت که در آن  $p_1$  و  $p_2$  اعداد اول و  $e_1$  و  $e_2$  اعداد صحیح هستند. مقدار  $p_1 + p_2 + e_1 + e_2$  را محاسبه کنید.

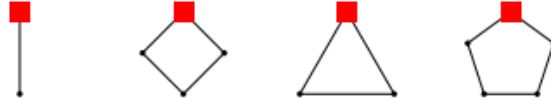


PUMaC 2024

**پرسش ۹.** ۲۰۲۴ آدمکش کاملاً منطقی دور یک دایره قرار دارند و به صورت ساعت‌گرد از ۱ تا ۲۰۲۴ شماره‌گذاری شده‌اند. نوبت به صورت ساعت‌گرد میان آدمکش‌هایی که در آن لحظه زنده‌اند می‌چرخد و با شروع از آدمکش شماره یک تا وقتی بیش از یک نفر زنده باشد ادامه می‌یابد. هر آدمکش در نوبت خود باید یک نفر دیگر را بکشد و اجازه‌ی رد کردن نوبت را ندارد. کشتن آدمکش شماره  $k$  جایزه‌ای به ارزش  $k$  دلار دارد. اولویت اول هر آدمکش این است که آخرین فرد زنده باشد و اولویت دومش کشتن آدمکشی است که بیشترین جایزه را دارد (به غیر خودش). چه کسی زنده خواهد ماند؟

PUMaC 2024

**پرسش ۱۰.** الفبایی شامل چهار شکل داریم: پاره خط، الماس، مثلث و پنج ضلعی. همه‌ی این اشکال منتظم هستند. یک راس روی هر شکل نشانه گذاری شده که جهت گیری فعلی آن را مشخص می‌کند. (مطابق شکل زیر)



ریچارد رمزی به طول ۶ از این الفبا می‌سازد. سپس در هر ثانیه، هر پاره خط را  $180^\circ$  درجه، هر الماس را  $90^\circ$  درجه، هر مثلث را  $120^\circ$  و هر پنج ضلعی را  $72^\circ$  درجه به صورت ساعتگرد می‌چرخاند. پس از  $20$  ثانیه برای اولین بار همه‌ی شکل‌ها جهت‌هایی مشابه رمز اولیه پیدا می‌کنند. ریچارد چند رمز مختلف می‌تواند انتخاب کرده باشد؟

PUMaC 2025

**پرسش ۱۱.** ۶ مرد، شامل کنی و ۶ زن به طور تصادفی دور یک میز دایره‌ای نشسته‌اند. می‌دانیم کنی در کنار دو زن نشسته است. امید ریاضی تعداد جفت‌های مجاور مرد و زن دور میز را پیدا کنید.

PUMaC 2025

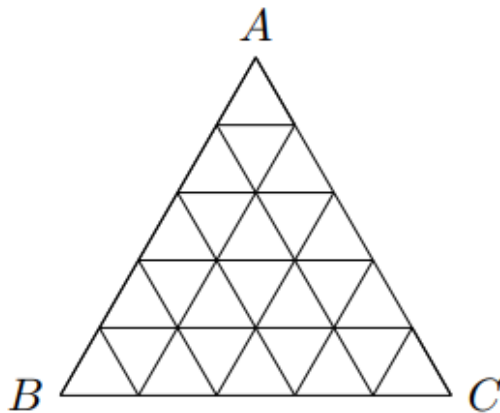
**پرسش ۱۲.** به آرایه‌ای متشکل از ارقام ۰، ۱ و ۲ خوب می‌گوییم اگر شامل زیرآرایه‌های "۰۱" و "۱۲" نباشد، با ۲ شروع نشده و با ۰ هم تمام نشود. به عنوان مثال ۵ رشته‌ی خوب به طول ۳ وجود دارد که عبارتند از:

"۰۰۲"، "۰۲۱"، "۰۲۲"، "۱۰۲"، "۱۱۱"

تعداد آرایه‌های خوب به طول ۷ را پیدا کنید.

PUMaC 2025

**پرسش ۱۳.** شما روی راس  $A$  در شبکه‌ی مثلثی زیر ایستاده‌اید. در هر یک از راس‌های  $B$  و  $C$  یک هیولا ایستاده است. در هر لحظه، شما در امتداد یک یال به سمت  $BC$  حرکت می‌کنید. این یال به طور تصادفی از بین دو یال ممکن انتخاب می‌شود. به همین ترتیب هیولایی که از ضلع  $B$  شروع کرده به سمت  $AC$  و هیولایی که از ضلع  $C$  شروع کرده به سمت  $AB$  حرکت می‌کند. اگر در یک لحظه با یک هیولا در راسی که روی  $BC$  قرار ندارد ملاقات کنید می‌میرید. اگر بدون مردن به  $BC$  برسید نجات پیدا می‌کنید. (حتی اگر همزمان با یک هیولا در راسی از  $BC$  قرار داشته باشید.) احتمال نجات یافتن خود را محاسبه کنید.



PUMaC 2025

**پرسش ۱۴.** یک سنگ روی یکی از خانه‌های یک جدول  $5 \times 5$  قرار دارد. آلیس و باب به نوبت سنگ را به یک خانه‌ی مجاور یالی (بالا، پایین، چپ، راست) منتقل می‌کنند. آلیس ابتدا حرکت می‌کند. نمی‌توان سنگ را به خانه‌ای که قبلاً دیده شده است منتقل کرد. (پس نمی‌توانند خانه‌ی آغازین را هم دوباره ببینند.) بازیکنی که در نوبت خود نتواند یک حرکت قانونی انجام دهد می‌بازد. به ازای چند خانه‌ی آغازین آلیس استراتژی برد دارد؟

PUMaC 2025

**پرسش ۱۵.** ژونگشو در بسته‌های ۲۰۲۵ تایی جوراب می‌فروشد. هر جوراب در هر یک از این بسته‌ها به احتمال یکسان قرمز، سبز یا زرد است. شما تعدادی (حداقل ۱) بسته جوراب می‌خرید به طوری که بتوانید تمام جوراب‌ها را به جفت‌های هم‌رنگ تقسیم کنید. امید ریاضی تعداد بسته‌های خریداری شده را محاسبه کنید.

PUMaC 2025

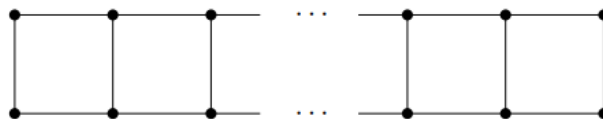
**پرسش ۱۶.** آلیس می‌خواهد عدد ۱۲۰ را به شکل یک رشته‌ی باینری به طول ۷ برای باب ارسال کند. کامپیوتر او تحت بمباران پرتوهای کیهانی قرار گرفته است که می‌توانند هر چند بار که بخواهند ۰۰ را به ۱۱ و ۱۱ را به ۰۰ تبدیل کنند. باب یک رشته دریافت می‌کند که ممکن است تغییر داده شده باشد و آن را به یک عدد در مبنای ۱۰ تبدیل کرده و یادداشت می‌کند. مجموع تمام عددهایی که باب ممکن است یادداشت کرده باشد محاسبه کنید. (شامل خود ۱۲۰ هم می‌شود)

PUMaC 2025

**پرسش ۱۷.** چارلز دیوید را به بازی کسرساز دعوت می‌کند. در این بازی، ابتدا دیوید دو عدد صحیح مثبت  $n \geq m$  را انتخاب می‌کند به طوری که جمع آن‌ها برابر با ۲۰۲۵ شود. سپس چارلز اعداد صحیح  $a$  و  $b$  را به صورت تصادفی انتخاب می‌کند به طوری که  $m > a \geq 0$  و  $n > b \geq 0$ . اگر مقدار  $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$  حداقل ۱ باشد، دیوید و در غیر اینصورت چارلز برنده می‌شود. اگر دیوید مقادیر  $n$  و  $m$  را به صورت بهینه انتخاب کند به چه احتمالی برنده خواهد شد؟

PUMaC 2025

**پرسش ۱۸.** گراف زیر با ۴۰۵۰ راس و ۶۰۷۳ یال را در نظر بگیرید. هر یال به صورت مستقل به احتمال  $\frac{3}{5}$  حذف می‌شود. فرض کنید  $C$  امید ریاضی تعداد مولفه‌های همبندی گراف حاصل باشد. نزدیک‌ترین عدد صحیح به  $49C$  را محاسبه کنید.



PUMaC 2025