PUMaC 2020, 2023, 2024

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. رانی به زبان ساختگی رانیز که فقط از ۵ حرف zap، zep، zip، zop و zup تشکیل شده صحبت می‌کند. کلمات در زبان رانیز بین ۱ تا ۵ حرف دارند. علاوه بر این، رانی می‌تواند روی هر تعداد از حروف یک کلمه که بخواهد علامت تاکید بگذارد و یک کلمه‌ی کاملا متفاوت بسازد. بیشترین تعداد ممکن کلمات در زبان رانیز چقدر است؟

PUMaC 2020

پرسش ۲. جویی با یک مکعب روبیک ۲ × ۲ × ۲ بازی می‌کند که از ۸ مکعب واحد ۱ × ۱ × ۱ تشکیل شده است (به طوری که در هر ضلع مکعب بزرگ، دو مکعب کوچک قرار دارند). اما روزی جویی به‌طور اتفاقی مکعب را می‌شکند! او تصمیم می‌گیرد مکعب را دوباره در حالت حل‌شده‌ی اصلی خود سرهم کند و مکعب‌های واحد را یکی‌یکی در جای خود قرار دهد. او فقط زمانی می‌تواند یک مکعب واحد جدید را قرار دهد که آن مکعب با حداقل یکی از مکعب‌هایی که قبلاً قرار داده است مجاور باشد. اگر ترتیب‌های مختلفی که جویی در انتخاب و قرار دادن مکعب‌ها به کار می‌برد متمایز در نظر گرفته شوند، تعداد روش‌های ممکن برای سرهم کردن مکعب را تعیین کنید.

PUMaC 2020

پرسش ۳. کاری ۶ سکه‌ی متفاوت داخل یک شیشه دارد. در هر مرحله او ۳ تا از سکه‌ها را بیرون آورده و یک نقطه به هر کدام از آن‌ها اضافه می‌کند. تعداد ترتیب‌های مختلفی که کاری می‌تواند سکه‌ها را انتخاب کند به طوری که در نهایت به ازای هر $i \in \{۰, ۱, \dots, ۵\}$ یک سکه با دقیقا i نقطه وجود داشته باشد تعیین کنید.

PUMaC 2020

پرسش ۴. کیتی شکلاتی به فرم یک شبکهٔ ۵×۵ دارد اما فقط می‌خواهد قطعه‌ی مرکزی را بخورد. برای رسیدن به هدف خود، عملیات زیر را انجام می‌دهد:

۱. یکی از خطوط شبکه را انتخاب کرده و شکلات را در امتداد آن خط به دو قسمت تقسیم می‌کند.

۲. بخشی را که قطعه‌ی مرکزی در آن قرار ندارد، دور می‌اندازد.

۳. با قسمت باقی‌مانده، دوباره مراحل ۱ و ۲ را تکرار می‌کند.

مشخص کنید چند دنباله عملیات مختلف وجود دارد که کیتی با انجام آن‌ها به هدف خود می‌رسد.

PUMaC 2020

پرسش ۵. فرض کنید P مجموعه‌ی توانیِ $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ باشد (یعنی عناصر P همه‌ی زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ هستند). چند زیرمجموعه S از P وجود دارد به‌طوری‌که هیچ دو عدد متمایز a و b از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ نباشند که دقیقاً در یک عضو از S با هم ظاهر شوند؟

PUMaC 2020

پرسش ۶. جیکوب یک تکه نان به شکل عدد ۸ لاتین دارد که به بخش‌های مختلف تقسیم شده است و در ابتدا همه‌ی بخش‌ها به هم متصل‌اند و یک تکه‌ی واحد را تشکیل می‌دهند. قسمت مرکزی عدد ۸ (محل اتصال دو حلقه) یک بخش واحد است و هر یک از دو حلقهٔ عدد ۸ نیز به ۱۰۱۰ بخش دیگر تقسیم شده‌اند. برای هر بخش، با احتمال ٪۵۰ جیکوب تصمیم می‌گیرد آن بخش را ببرد و به یکی از دوستانش بدهد. این تصمیم‌ها برای بخش‌های مختلف مستقل از یکدیگر هستند. بخش‌های باقی‌مانده‌ی نان ممکن است به چند مؤلفهٔ همبند (چند تکه‌ی جدا از هم) تقسیم شوند. فرض کنید E امید ریاضی تعداد این تکه‌های باقی‌مانده باشد. (اگر جیکوب همهٔ بخش‌ها را اهدا کند، تعداد تکه‌های باقی‌مانده را ۰ در نظر می‌گیریم.) اگر k کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت باشد که

$$۲^k\left(E - \lfloor E \rfloor\right) \geq ۱,$$

آنگاه مقدار

$$\lfloor E \rfloor + k$$

را محاسبه کنید.

PUMaC 2020

پرسش ۷. در کشور پرینستونیا بی‌نهایت شهر وجود دارد که با جاده‌ها به هم متصل شده‌اند. برای هر دو شهر متمایز، دقیقاً یک دنباله‌ی یکتا از جاده‌ها وجود دارد که یکی را به دیگری می‌رساند. همچنین از هر شهر دقیقاً سه جاده خارج می‌شود. در یک صبح آفتابی اوایل جولای، n گردشگر به پایتخت پرینستونیا وارد می‌شوند. آن‌ها هر روز این فرآیند را تکرار می‌کنند: در هر شهری که دست‌کم ۳ گردشگر حضور دارند، ۳ گردشگر انتخاب می‌شوند و هر یک از آن‌ها از یکی از سه جاده‌ی متصل به آن شهر عبور کرده و به یکی از سه شهر همسایه می‌رود. اگر در شهری ۲ گردشگر یا کمتر حضور داشته باشند، هیچ‌کس جابه‌جا نمی‌شود. پس از مدتی، همهٔ گردشگران در شهر ثابتی باقی خواهند ماند. به ازای چند مقدار از n در بازهٔ ۱ تا ۲۰۲۰، وضعیت نهایی به گونه‌ای خواهد بود که هیچ دو گردشگری در یک شهر نباشند؟

PUMaC 2020

پرسش ۸. به چند طریق می‌توان تعداد مثبتی از خانه‌های یک جدول ۲×۴ را رنگ کرد به طوری که هیچ دو خانه‌ی رنگی‌ای یال مشترک نداشته باشند؟

PUMaC 2023

پرسش ۹. امیر وارد فاین‌هال می‌شود و عدد ۲ را روی یک تخته‌سیاه می‌بیند. امیر می‌تواند عملیات زیر را انجام دهد: یک سکه می‌اندازد و اگر شیر بیاید عدد x روی تخته را با $۳x+۱$ جایگزین می‌کند. در غیراینصورت x را با $\lfloor \frac{x}{۳} \rfloor$ جایگزین می‌کند. اگر امیر این عملیات را ۴ بار انجام دهد، فرض کنید $\frac{m}{n}$ امید ریاضی تعداد دفعاتی باشد که رقم ۱ را روی تخته نوشته است. m و n اعداد صحیح و نسبت به هم اولند. مقدار $m+n$ را محاسبه کتید.

PUMaC 2023

پرسش ۱۰. کانر فضایی از مبدا (۰، ۰) روی شبکه‌ی نقاط صحیح شروع به حرکت می‌کند. او در هر دقیقه یک گام در راستای یکی از ۴ جهت اصلی برمی‌دارد و جهت حرکت را به صورت تصادفی و با احتمال برابر انتخاب می‌کند. البته اگر ۴ گام قبلی او در یک جهت بوده باشند نمی‌تواند در آن جهت حرکت کند و باید با احتمال برابر و تصادفی بین ۳ جهت دیگر انتخاب کند. هر بار که کانر گام برمی‌دارد، روی نقطه‌ای که ترک می‌کند گاز سمی باقی می‌گذارد که تا ۱۵۰ ثانیه در نقطه می‌ماند. اگر پس از برداشتن ۵ گام، احتمال برخورد نکردن کانر با گاز سمی برابر با $\frac{a}{b}$ باشد که در آن a و b اعداد صحیح و نسبت به هم اولند، مقدار $a+b$ را محاسبه کنید.

PUMaC 2023

پرسش ۱۱. فرض کنید $\oplus$ عملگر دودویی xor را نشان دهد. تعریف می‌کنیم $x * y = (x+y) - (x \oplus y)$. مقدار $\sum_{k=۱}^{۶۳} (k * ۴۵)$ را محاسبه کنید.

PUMaC 2023

پرسش ۱۲. اعداد صحیح ۱ تا ۲۵ در یک جدول 5×5 به طور تصادفی نوشته شده‌اند به طوری که در هر ردیف اعداد از چپ به راست صعودی هستند. ستون‌ها از چپ به راست از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده‌اند. اگر امید ریاضی شماره‌ی ستون عدد ۲۳ را بتوان به فرم $\frac{a}{b}$ نوشت که در آن a و b اعداد صحیح و نسبت به هم اولند، مقدار $a+b$ را محاسبه کنید.

PUMaC 2023

پرسش ۱۳. دنباله‌ای از اعداد صحیح $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را شبه‌فیبوناچی می‌نامیم اگر $a_1 = a_2 = 1$ و برای هر $3 \leq i \leq n$ داشته باشیم $a_i \leq a_{i-1} + a_{i-2}$. چند دنباله‌ی شبه‌فیبوناچی ده‌جمله‌ای وجود دارد که دو جمله‌ی آخر آن هر دو برابر ۲۰ باشند؟

PUMaC 2023

پرسش ۱۴. n آدمکش به شماره‌های ۱ تا n داریم و در ابتدا همه‌ی آن‌ها زنده هستند. آدمکش‌ها بازی‌ای انجام می‌دهند که در آن به ترتیب شماره نوبت می‌گیرند: ابتدا آدمکش ۱، سپس آدمکش ۲، و به همین ترتیب تا آدمکش n. پس از نوبت آدمکش n، این ترتیب دوباره از آدمکش ۱ تکرار می‌شود. اگر هنگام رسیدن نوبت یک آدمکش، او مرده باشد، نوبتش رد می‌شود و نوبت به نفر بعدی می‌رسد. در نوبت هر آدمکش، او می‌تواند آدمکشی را که در غیر این صورت قرار بود نفر بعدی بازی کند بکشد یا هیچ کاری انجام ندهد. هر آدمکش در نوبت خود حتماً می‌کشد، مگر آنکه تنها راه تضمین بقای خودش این باشد که هیچ کاری انجام ندهد. اگر در ابتدای بازی ۲۰۲۳ آدمکش وجود داشته باشند، پس از آنکه یک دور کامل از نوبت‌ها سپری شود که در طی آن هیچ‌کس کسی را نکشد، چند آدمکش باید زنده مانده باشند؟

PUMaC 2023

پرسش ۱۵. برای هر عدد صحیح مثبت n، مجموعه‌ی P_n را مجموعه‌ی تمام دنباله‌های شامل $۲n$ عضو تعریف می‌کنیم که هر عضو یا ۰ است یا ۱، به طوری که دقیقاً n تا ۰ و n تا ۱ در دنباله وجود داشته باشد. یک دنباله را به طور تصادفی و با احتمال برابر از P_n انتخاب می‌کنیم. سپس این دنباله را به بزرگ‌ترین بلوک‌های متوالی از صفرها و یک‌ها افراز می‌کنیم. تابع f(n) را برابر با امید ریاضی مجموع مربع طول بلوک‌ها در این دنباله‌ی تصادفی تعریف می‌کنیم. بزرگ‌ترین مقدار صحیحی که f(n) می‌تواند اختیار کند چیست؟

PUMaC 2023

پرسش ۱۶. یک شرکت خدمات برق در حال ساخت شبکه‌ای برای رساندن برق به ۵۰ خانه با شماره‌های $۰,۱,۲,\ldots,۴۹$ است. نیروگاه برق فقط مستقیماً به خانه‌ی ۰ متصل می‌شود؛ بنابراین برق از طریق مجموعه‌ای از سیم‌ها که برخی جفت‌های مشخص از خانه‌ها را به هم متصل می‌کنند، به سایر خانه‌ها می‌رسد. برای صرفه‌جویی در هزینه، شرکت فقط بین کمترین تعداد ممکن از جفت‌خانه‌های متمایز سیم‌کشی انجام می‌دهد. علاوه بر این، بین دو خانه با شماره‌های a و b فقط در صورتی می‌توان سیم کشید که دست‌کم یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

- هم a و هم b بر ۱۰ بخش‌پذیر باشند.
- $$\left\lfloor \frac{b}{۱۰} \right\rfloor \equiv \left\lfloor \frac{a}{۱۰} \right\rfloor \pmod{۵}.$$
- $$\left\lceil \frac{b}{۱۰} \right\rceil \equiv \left\lceil \frac{a}{۱۰} \right\rceil \pmod{۵}.$$

اگر N تعداد روش‌های متمایز پیکربندی چنین شبکه‌ی سیم‌کشی‌ای باشد به گونه‌ای که همه‌ی خانه‌ها برق دریافت کنند، باقیمانده‌ی N بر ۱۰۰۰ را بیابید.

PUMaC 2023

پرسش ۱۷. برای یک رشته‌ی دودویی S (یعنی رشته‌ای متشکل از ۰ و ۱) که حداقل یک صفر داشته باشد، تابع f(S) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر زیررشته‌ی ۱۱۰ در S وجود داشته باشد، همه‌ی ۱۱۰ ها را با ۰۱ جایگزین می‌کنیم و رشته‌ی حاصل را f(S) می‌نامیم. در غیر این صورت، چپ‌ترین صفرِ S را به ۱ تبدیل می‌کنیم و رشته‌ی حاصل را f(S) می‌نامیم. برای یک رشته‌ی دودویی S با طول n، طول عمر آن را تعداد دفعاتی تعریف می‌کنیم که می‌توان تابع f را روی آن اعمال کرد تا در نهایت رشته‌ای بدون صفر به دست آید. برای مثال:

$$۱۱۱۰۰۰ \to ۱۰۱۰۰ \to ۱۱۱۰۰ \to ۱۰۱۰ \to ۱۱۱۰ \to ۱۰۱ \to ۱۱۱$$

بنابراین طول عمر رشته‌ی ۱۱۱۰۰۰ برابر ۶ است. برای هر $n \geq ۲$، مشخص کنید کدام رشته(های) دودویی به طول n بیشترین طول عمر را دارند.

PUMaC 2023

پرسش ۱۸. سونای در خانه‌ی پایین-چپ یک صفحه‌ی شطرنجی قرار دارد که ۵ خانه عرض و ۳ خانه ارتفاع دارد. از هر خانه‌ای او می‌تواند یک خانه به سمت بالا، پایین یا راست حرکت کند به شرطی که از صفحه خارج نشود و وارد خانه‌ای که قبلا آن را دیده نشود. تعداد مسیرهای ممکن او از خانه‌ی آغازین به خانه‌ی بالا-راست را محاسبه کنید.

PUMaC 2024