



CMIMC 2023-2025

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. رابرت پنج مهره در دست دارد با حروف C, M, I, M, C و می‌خواهد یک دست‌بند حلقه‌ای بسازد که عبارت CMIMC را تشکیل دهد. اما برق قطع شده و رابرت دیگر نمی‌تواند مهره‌ها را ببیند؛ بنابراین پنج مهره را به صورت تصادفی روی دست‌بند می‌چیند، با این امید که دست‌بند (پس از آن‌که در صورت لزوم چرخانده یا برگردانده شود) عبارت CMIMC را نشان دهد. احتمال وقوع این حالت چقدر است؟ (رابرت اهمیتی نمی‌دهد که بعضی حروف وارونه یا از راست‌به‌چپ دیده شوند.)

CMIMC 2025 combinatorics

پرسش ۲. هر روز، فلامینگویی به نام Pinky با احتمال‌های برابر، یا ۱ میگوی کوچک می‌خورد یا ۲ میگوی کوچک. به محض این‌که Pinky در مجموع ۱۰ میگو یا بیشتر خورده باشد، پوستش صورتی می‌شود. به محض این‌که Pinky در مجموع ۱۱ میگو یا بیشتر خورده باشد، بیمار می‌شود. احتمال این‌که Pinky در روزی که پوستش صورتی می‌شود بیمار نشود چقدر است؟

CMIMC 2025 combinatorics

پرسش ۳. ۳۴ دوست به صورت دایره‌ای نشسته‌اند و بازی زیر را انجام می‌دهند. در هر دور، چهار نفر به طور تصادفی انتخاب می‌شوند و یک نبرد رپ بین آن‌ها برگزار می‌شود. برنده‌ی نبرد در دایره می‌ماند و سه نفر دیگر از بازی خارج می‌شوند. این روند آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا فقط یک نفر باقی بماند. فرض کنید همه به یک اندازه شانس بردن هر دور را دارند. احتمال این‌که Michael و James در یک دور با هم وارد نبرد شوند چقدر است؟

پرسش ۴. فرض کنید n و k اعداد صحیح مثبت باشند، به طوری که $k \leq n$. یک گراف ساده و بدون جهت $G_{n,k}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: رأس‌های آن همه‌ی رشته‌های دودویی طول n هستند، و بین دو رشته یال وجود دارد اگر و تنها اگر در دقیقاً k موقعیت با هم تفاوت داشته باشند. اگر $c_{n,k}$ تعداد مؤلفه‌های همبند $G_{n,k}$ باشد، مقدار

$$\sum_{n=1}^{10} \sum_{k=1}^n c_{n,k}$$

را بیابید.

(برای نمونه، $G_{3,2}$ دو مؤلفه‌ی همبند دارد.)

پرسش ۵. یک دسته‌کارت ۱۲تایی در نظر بگیرید که شامل هر چهار خال از کارت‌های ۲، ۳ و ۴ است (یعنی از هر عدد ۲، ۳، ۴ چهار کارت داریم). «دوبل» (double) یعنی دو کارت مجاور در دسته که هم‌عدد باشند. فرض کنید دسته را از چپ به راست نگاه می‌کنیم و هر بار که به یک دوبل برسیم، همه‌ی کارت‌ها را تا همان نقطه (شامل خودِ دوبل) از دسته حذف می‌کنیم. بگذارید N تعداد دفعاتی باشد که مجبور می‌شویم کارت حذف کنیم. مقدار امید ریاضی N را بیابید.

پرسش ۶. یک شبکه‌ی 4×4 از خانه‌ها را در نظر بگیرید. در بعضی از خانه‌ها سکه می‌گذاریم به طوری که هیچ دو سکه‌ای در مجاورت افقی یا عمودی نباشند، و هر مربع 2×2 در شبکه دست‌کم یک سکه داشته باشد. چند روش برای قرار دادن سکه‌ها وجود دارد؟

پرسش ۷. آلن یک روز حوصله‌اش سر می‌رود و تصمیم می‌گیرد همه‌ی مقسوم‌علیه‌های $۱۲۶۰^۲$ را روی یک دیوار بنویسد. بعد از این‌که همه را نوشت، متوجه می‌شود روی دیوار اشتباهی نوشته و باید همه‌ی نوشته‌ها را پاک کند. هر ثانیه، او یک مقسوم‌علیه را که هنوز روی دیوار باقی مانده به‌طور تصادفی انتخاب می‌کند و بلافاصله آن را پاک می‌کند و همچنین هر عددی را که مقسوم‌علیه آن عدد باشد نیز پاک می‌کند.

امید ریاضی‌ زمانی که طول می‌کشد تا آلن همه‌چیز را روی دیوار پاک کند چقدر است؟

CMIMC 2025

پرسش ۸. برای هر عدد صحیح مثبت n (که بدون صفرهای ابتدایی نوشته شده است)، فرض کنید $t(n)$ برابر با عددی باشد که از معکوس کردن ارقام n به دست می‌آید. برای مثال، $t(۴۶۱) = ۱۶۴$ و $t(۵۶۰) = ۶۵$. برای چند عدد صحیح مثبت سه رقمی مانند m ، عبارت $m + t(t(m))$ فرد است؟

CMIMC 2024

پرسش ۹. رابرت دو دسته کارت پنج‌تایی دارد که با اعداد ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده‌اند؛ یکی از آن‌ها به‌طور تصادفی بر زده شده و دیگری به ترتیب عددی است. آن‌ها یکی از دسته‌ها را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنند و سه کارت اول را برمی‌گردانند، و می‌بینند که به ترتیب ۱، ۲، و ۳ هستند. احتمال این‌که کارت بعدی ۴ باشد چقدر است؟

CMIMC 2024

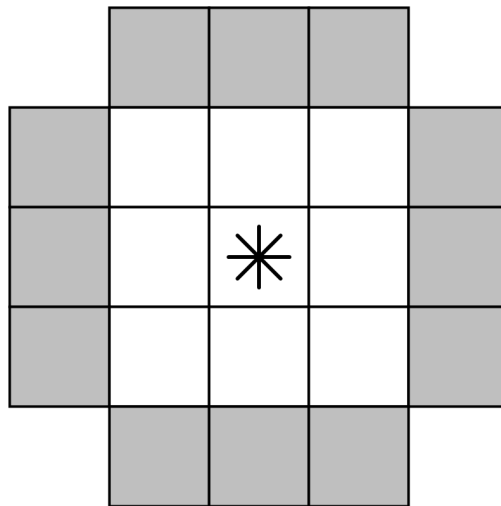
پرسش ۱۰. میلو پنج تاس استاندارد را می‌ریزد که به ترتیب دارای ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۰ وجه هستند که هر کدام متناسب با تعداد وجه‌ها یا همان n ، از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. به چند طریق متمایز آن‌ها می‌توانند یک «فول هاوس» (سه تاس با یک عدد و دو تاس با عددی دیگر) بیاورند؟ ظاهر شدن اعداد یکسان روی تاس‌های مختلف، به عنوان فول هاوس‌های متمایز در نظر گرفته می‌شود، بنابراین دو حالت $(۱، ۱، ۱، ۲، ۲)$ و $(۱، ۱، ۱، ۲، ۲)$ حالات متفاوت در نظر گرفته می‌شوند.

CMIMC 2024

پرسش ۱۱. در یک مهمانی، ۵ نفر حضور دارند. برای هر جفت از افراد، با احتمال $\frac{1}{4}$ دوست هستند، مستقل از همه‌ی جفت‌های دیگر. امید ریاضی تعداد جفت‌هایی از افراد که یک دوست مشترک دارند اما خودشان با هم دوست نیستند، چقدر است؟

CMIMC 2024

پرسش ۱۲. در جدول زیر، اعداد ۱ تا ۱۲ را در خانه‌های سایه‌دار قرار دهید. شما از خانه‌ی مرکزی که با * مشخص شده شروع می‌کنید. هر بار به صورت یکنواخت و تصادفی یکی از جهات بالا، پایین، چپ یا راست را انتخاب می‌کنید و حرکت می‌کنید، تا وقتی که به یک خانه‌ی سایه‌دار برسید. امتیاز شما عددی است که در خانه‌ی سایه‌دار نهایی قرار گرفته است.



اگر m کمترین امید ریاضی ممکن امتیاز شما باشد (بسته به این‌که اعداد را چگونه چیده‌اید)، و M بیشترین امید ریاضی ممکن باشد، مقدار $m \cdot M$ را بیابید.

CMIMC 2024

پرسش ۱۳. مایکل و جیمز در حال انجام یک بازی هستند که در آن به نوبت به سمت یک تخته دارت ساده شده، دارت پرتاب می‌کنند. امتیاز هر پرتاب دارت یا ۲۵ و یا ۵۰ امتیاز است. آن‌ها دنباله امتیازات هر پرتاب را (که بینشان مشترک است) ثبت می‌کنند و اولین باری که مجموع سه امتیاز آخر برابر ۱۲۵ شود، شخصی که آخرین دارت را پرتاب کرده است، برنده می‌شود. در هر پرتاب، هر بازیکن با احتمال $\frac{2}{3}$ امتیازی را که هدف گرفته است به دست می‌آورد و با احتمال $\frac{1}{3}$ امتیاز دیگر را کسب می‌کند. فرض کنید مایکل بازی را شروع می‌کند و دو پرتاب اول هر دو ۲۵ هستند. اگر هر دو بازیکن از یک استراتژی بهینه استفاده کنند، احتمال برنده شدن مایکل چقدر است؟

CMIMC 2024

پرسش ۱۴. اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ مجموعه‌ای از اعداد صحیح با شرط $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ باشد، تعریف می‌کنیم:

$$f(S) = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 s_k$$

(اگر S تهی باشد، $f(S) = 0$ در نظر گرفته می‌شود.) مقدار میانگین $f(S)$ را به ازای تمامی زیرمجموعه‌های ممکن S از مجموعه $\{1^2, 2^2, \dots, 100^2\}$ محاسبه کنید.

CMIMC 2024

پرسش ۱۵. شش آدمکش که با اعداد ۱ تا ۶ شماره‌گذاری شده‌اند، دور یک دایره ایستاده‌اند. به هر آدمکش به صورت تصادفی یک هدف اختصاص داده می‌شود، به طوری که هدف هر آدمکش با بقیه متفاوت است و هیچ‌کس هدف خودش نیست. به ترتیب صعودی شماره‌ها، هر آدمکش اگر هنوز زنده باشد، هدف خود را می‌کشد. امید ریاضی تعداد آدمکش‌هایی که در پایان این فرایند زنده می‌مانند را بیابید.

CMIMC 2024

پرسش ۱۶. فرض کنید ۱۰۰ نفر در یک پارک جمع شده‌اند و هرکدام یک پاکت دارند که نام خودشان روی آن نوشته شده است (و همه‌ی نام‌ها متفاوت‌اند). سپس پاکت‌ها به صورت یکنواخت و تصادفی بین افراد جابه‌جا می‌شوند. اگر N تعداد افرادی باشد که در نهایت پاکتِ درستِ خودشان را می‌گیرند، امید ریاضی N^5 را بیابید.

CMIMC 2024

پرسش ۱۷. اوه نه! تئو در حین بازی ماریو پارتی، داخل «منطقه باوزر» (Bowser Zone) افتاده است. اگر تاس بعدی او عددی بین ۱ تا ۵ (شامل خود ۱ و ۵) باشد، باوزر «شعله صفر» (Zero Flame) خود را شلیک می‌کند که تعداد سکه‌ها و ستاره‌های بازیکن را به صفر می‌رساند. خوشبختانه تئو یک «بلوک تاس دوپل» دارد که به او اجازه می‌دهد دو تاس ۱۰ وجهی استاندارد (با اعداد ۱ تا ۱۰) بریزد و مجموع آن‌ها را به عنوان عدد تاس خود در نظر بگیرد. با این شرایط، احتمال اینکه او بدون از دست دادن سکه‌ها و ستاره‌هایش از منطقه باوزر فرار کند چقدر است؟

CMIMC 2023

پرسش ۱۸. عدد طبیعی A را بیابید به طوری که تعداد جواب‌های صحیح نامنفی نامساوی

$$x + y \geq A$$

دقیقاً برابر A باشد، به شرط آن‌که

$$0 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq 7.$$

CMIMC 2023

پرسش ۱۹. کلارا بل می‌خواهد در صفحه مختصات از نقطه $(0, 0)$ به نقطه $(6, 2)$ سفر کند. او می‌تواند با گام‌های یک‌واحدی به سمت بالا، پایین یا راست حرکت کند، باید بین خطوط $y = 0$ و $y = 2$ (شامل خود این خطوط) باقی بماند و مجاز نیست از یک نقطه دوبار عبور کند. او چند مسیر می‌تواند انتخاب کند؟

CMIMC 2023

پرسش ۲۰. مقدار

$$1 \oplus 2 \oplus \dots \oplus 987654321$$

را بیابید، که در آن \oplus همان bitwise exclusive OR است.

CMIMC 2023