



CMIMC 2020-2023

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. یک درخت BWM به صورت بازگشتی تعریف می‌شود:

- یک درخت خالی، یک درخت BWM با ارتفاع ۰ و اندازه‌ی ۰ است.
 - یک درخت BWM ناتهی از یک گره‌ی ریشه و سه زیردرخت تشکیل می‌شود که هرکدام خودشان یک درخت BWM (احتمالاً خالی) هستند. ارتفاع بلندترین زیردرخت حداکثر ۲ واحد بیشتر از ارتفاع کوتاه‌ترین زیردرخت است.
 - ارتفاع یک درخت BWM ناتهی، یک واحد بیشتر از ارتفاع بلندترین زیردرخت آن است، و اندازه‌ی آن یک واحد بیشتر از مجموع اندازه‌های زیردرخت‌هایش است.
- کمترین اندازه‌ی یک درخت BWM با ارتفاع ۱۰ چقدر است؟

CMIMC 2023

- ### **پرسش ۲.** تعداد اعداد صحیح مثبت پنج‌رقمی را بیابید که رقم‌های آن‌ها دقیقاً ۳۰ جایگشت متفاوت دارند. (جایگشت لزوماً نباید عدد پنج‌رقمی معتبر باشند، یعنی اعداد می‌توانند با صفر شروع شوند.)

CMIMC 2023

پرسش ۳. چند تابع $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ مقدار

$$f(f(x)) + f(x) + x$$

بر ۳ بخش پذیر باشد؟

CMIMC 2023

پرسش ۴. یک جدول را k -special می‌نامیم اگر در هر خانه آن یک عدد صحیح متمایز نوشته شده باشد، به طوری که مجموعه اعداد نوشته شده در جدول دقیقاً برابر مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت k باشد. یک جدول را k -awesome می‌نامیم اگر k -special باشد و علاوه بر آن، برای هر مقسوم‌علیه مثبت m از k ، یک جدول m -special درون این جدول k -special وجود داشته باشد (منظور از «درون» این است که بتوانید در همین جدول یک مستطیل رسم کنید تا جدول جدید به دست آید). مجموع ۴ عدد کوچک‌تر k را بیابید که برای آن‌ها هیچ جدول k -awesome وجود ندارد.

CMIMC 2023

پرسش ۵. با یک جدول 5×5 شروع کنید؛ یک مربع 4×4 در داخل آن انتخاب کنید. سپس، یک مربع 3×3 درون آن مربع 4×4 ، یک مربع 2×2 درون آن مربع 3×3 ، و یک مربع 1×1 درون آن مربع 2×2 انتخاب کنید. با فرض اینکه تمام مربع‌های انتخاب شده از مربع‌های واحد درون جدول تشکیل شده‌اند، به چند طریق می‌توان این مربع‌ها را انتخاب کرد تا مربع 1×1 نهایی دقیقاً مرکز جدول 5×5 اولیه باشد؟

CMIMC 2022

پرسش ۶. دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت دوه‌دو متمایز را «میانگین‌گیر» می‌نامیم، اگر هر جمله پس از دو جمله اول، میانگین دو جمله قبل از خود باشد. فرض کنید M بیشترین تعداد جملات ممکن در یک دنباله میانگین‌گیر باشد که در آن هر جمله کمتر یا مساوی ۲۰۲۲ است، و N تعداد چنین دنباله‌های متمایزی (که هر جمله کمتر یا مساوی ۲۰۲۲ است) با دقیقاً M جمله باشد. مقدار $M + N$ چقدر است؟ (دو دنباله a_1, a_2, \dots, a_n و b_1, b_2, \dots, b_n متمایز نامیده می‌شوند اگر به ازای برخی از اعداد صحیح $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $a_i \neq b_i$).

CMIMC 2022

پرسش ۷. برای یک دوره‌ی خانوادگی، ۸ نفر هر کدام یک غذا سفارش می‌دهند. این خانواده دور یک میز گرد می‌نشینند. تعداد راه‌های چیدن غذاها را به دست آورید به طوری که غذای هر فرد یا در سمت چپ، یا در سمت راست، و یا مستقیماً مقابل او قرار بگیرد.

CMIMC 2022

پرسش ۸. گروه موسیقی CMU Kiltie در تلاش هستند تا با استفاده از یک قلاب کشنده، یک هلیکوپتر را ساقط کنند. هلیکوپتر در ابتدا موازی با زمین (زاویهٔ ۰ درجه) قرار دارد. هر بار که اعضای گروه قلاب را می‌کشند، اگر هلیکوپتر در حال حاضر در زاویهٔ x درجه با زمین باشد، آن را با احتمال مساوی به اندازهٔ x یا $x + 1$ درجه به سمت جلو شیب می‌دهند. شیب دادن هلیکوپتر به زاویهٔ ۹۰ درجه یا بیشتر، باعث سقوط آن می‌شود. امید ریاضی دفعاتی را که گروه باید قلاب را بکشند تا هلیکوپتر سقوط کند، به دست آورید.

CMIMC 2022

پرسش ۹. در کلاسی با ۱۲ دانش‌آموز، هیچ دو نفری هم‌قد نیستند. تعداد کل راه‌هایی را محاسبه کنید که دانش‌آموزان بتوانند در یک صف به صف شوند، به طوری که:

- برای تمام $1 < i < 12$ ، فرد قرارگرفته در موقعیت i -ام (با فرض اینکه چپ‌ترین موقعیت ۱ باشد) دقیقاً از $(i \pmod{3})$ نفر از همسایگان مجاور خود بلندتر باشد، و
- قد دانش‌آموزانی که در موقعیت‌های مضرب ۳ ایستاده‌اند، از چپ به راست به‌طور اکید صعودی باشد.

CMIMC 2022

پرسش ۱۰. در مقر CMIMC ردیفی از n لامپ وجود دارد که هر یک از آنها به یک کلید برق متصل است. دانیال که یک برق‌کار است، می‌داند که دقیقاً یکی از کلیدها کار نمی‌کند و باید بفهمد کدام کلید خراب است. او در هر ثانیه می‌تواند دقیقاً یکی از ۳ کار زیر را انجام دهد:

- زدن یک کلید، که وضعیت لامپ را از خاموش به روشن یا از روشن به خاموش تغییر می‌دهد (مگر اینکه کلید خراب باشد).

- بررسی اینکه آیا یک لامپ مشخص روشن است یا خاموش.

- اندازه‌گیری کل برق مصرفی همه لامپ‌ها، که دقیقاً به او می‌گوید چه تعداد لامپ در حال حاضر روشن هستند.

در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش هستند. به دانیال مأموریت بسیار دشوار یافتن کلید خراب در حداکثر n ثانیه داده شده است، اما خوشبختانه او امروز ۱۰ ثانیه زودتر سر کار حاضر شد. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای n چقدر است به طوری که او بتواند کار خود را به موقع تمام کند؟

CMIMC 2022

پرسش ۱۱. آدام جعبه‌ای با ۱۵ توپ بلیارد دارد که از ۱ تا ۱۵ شماره‌گذاری شده‌اند و ۵ تای آنها را برمی‌دارد. سپس آنها را به ترتیب صعودی مرتب می‌کند، اختلاف هر دو توپ مجاور را به دست می‌آورد، و می‌بیند دقیقاً دو تا از این چهار اختلاف برابر ۱ هستند. چند انتخاب متفاوت از ۵ توپ ممکن بود از جعبه برداشته شده باشند؟

CMIMC 2021

پرسش ۱۲. آدام روی یک صفحه 9×9 بازی مین‌روب (Minesweeper) انجام می‌دهد که دقیقاً $\frac{1}{3}$ (یا 27) تا از خانه‌ها مین هستند (و چیدمان مین‌ها به‌طور یکنواخت تصادفی از بین همهٔ چنین صفحه‌هایی انتخاب شده است). هر بار که او روی یک خانه کلیک می‌کند، یا آن خانه مین است که در این صورت می‌بازد، یا عددی نشان داده می‌شود که می‌گوید چندتا از خانه‌های مجاور آن (حداکثر ۸ خانه) مین هستند.

ابتدا او روی خانهٔ دقیقاً بالای خانهٔ مرکزی کلیک می‌کند و عدد 4 ظاهر می‌شود. سپس روی خانهٔ دقیقاً پایینِ خانهٔ مرکزی کلیک می‌کند و عدد 1 ظاهر می‌شود. احتمال این‌که خانهٔ مرکزی یک مین باشد چقدر است؟

CMIMC 2021

پرسش ۱۳. چند جایگشت از رشتهٔ 0123456 وجود دارد که هیچ زیررشتهٔ متوالی با طول $1 < \ell < 7$ نداشته باشد که مجموع رقم‌هایش بر 7 بخش‌پذیر باشد؟

CMIMC 2021

پرسش ۱۴. فرض کنید یک تاس شش‌وجهی دارید که ۳ وجه آن قرمز، ۲ وجه آن آبی، و ۱ وجه آن سبز است. این تاس را ۲۰ بار پرتاب می‌کنید و رنگ نمایان شده در رو را ثبت می‌کنید. امیدریاضی حاصل ضرب تعداد وجه‌های قرمز، آبی و سبز چقدر است؟

CMIMC 2021

پرسش ۱۵. Alice و Bob هر کدام ۲۰ سکهٔ منصفانه پرتاب می‌کنند. با توجه به این‌که Alice حداقل به اندازهٔ Bob شیر آورده است، امیدریاضی تعداد شیرهایی که Alice آورده است چقدر است؟

CMIMC 2021

پرسش ۱۶. چند دنباله غیرکاهشی از اعداد صحیح $(a_1, a_2, \dots, a_{16})$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$0 \leq a_i \leq 16 \quad \text{به ازای هر } i$$

و مجموع همهٔ a_i ها زوج باشد؟

پرسش ۱۷. روی گراف G ، یک عمل افزایش به صورت زیر تعریف می‌شود:

- یک مجموعه از رأس‌های D را در G برمی‌داریم و هر رأس $v_i \in D$ را کپی می‌کنیم تا یک رأس جدید v'_i بسازیم.

- اگر بین دو رأس $v_i, v_j \in D$ یال وجود داشته باشد، بین v'_i و v'_j نیز یال می‌گذاریم. اگر بین $v_i \in D$ و $v_j \notin D$ یال وجود داشته باشد، می‌توانیم بین v'_i و v_j یال بگذاریم، ولی الزامی نیست.

می‌گوییم گرافی از G قابل رسیدن است اگر بتوان آن را با دنباله‌ای از عمل‌های افزایش از G ساخت.

گرافی H دارای n رأس است و این خاصیت را دارد که هم H و هم متمم H از یک گراف کامل با $2n$ رأس قابل رسیدن هستند. اگر بیشینه و کمینه مقادیر ممکن n به ترتیب M و m باشند، $M + m$ را بیابید.

پرسش ۱۸. در یک لیگ اسکواش داخلی (intramural) ۵ بازیکن به نام‌های آلبرت، باسیم، کلارا، دانیال و اوژن حضور دارند. آلبرت دقیقاً ۱ بازی انجام داده است، باسیم ۲ بازی، کلارا ۳ بازی و دانیال ۴ بازی انجام داده‌اند. با فرض این‌که هیچ دو بازیکنی بیش از یک بار با هم بازی نمی‌کنند، اوژن چند بازی انجام داده است؟

پرسش ۱۹. داوود در یک آزمون درست/غلط با ۹ سؤال شرکت می‌کند. متأسفانه او پاسخ هیچ‌یک از سؤال‌ها را نمی‌داند، اما می‌داند که دقیقاً ۵ تا از پاسخ‌ها درست هستند. مطابق این اطلاعات، داوود به همه ۹ سؤال پاسخ می‌دهد، به طوری که دقیقاً ۵ تا از پاسخ‌های خودش را درست می‌زند. احتمال این‌که او دست‌کم ۵ سؤال را درست جواب داده باشد چقدر است؟

پرسش ۲۰. آرایه‌ای داریم که خانه‌هایش را با شروع از عدد ۱ شماره‌گذاری کرده‌ایم و در ابتدا شامل اعداد ۱ تا ۱۰ به ترتیب صعودی است. عمل زیر را هر تعداد بار که بخواهیم تکرار می‌کنیم:

عمل:

۱. یک عدد صحیح n از ۱ تا ۱۰، شامل دو سر، انتخاب کن.
۲. بخش آرایه از اندیس ۱ تا اندیس n ، شامل دو سر، را وارونه کن.
۳. اگر $n < ۱۰$ باشد، بخش آرایه از اندیس $n + ۱$ تا اندیس ۱۰، شامل دو سر، را وارونه کن؛
وگرنه کاری انجام نده.

پس از پایان این فرایند، آرایه چند ترتیب ممکن می‌تواند داشته باشد؟

CMIMC 2020