



آزمون ترکیبی CHMMCJHMTMCCINTEGIRLS 1

- مدت زمان آزمون ۳/۵ ساعت است.
- در صورتی که پاسخ پرسشی عبارتی ریاضی است، باید تا حد امکان ساده شده، صریح و دقیق باشد.

پرسش ۱. تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی S از $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ را حساب کنید که میانه S عضوی از S باشد.

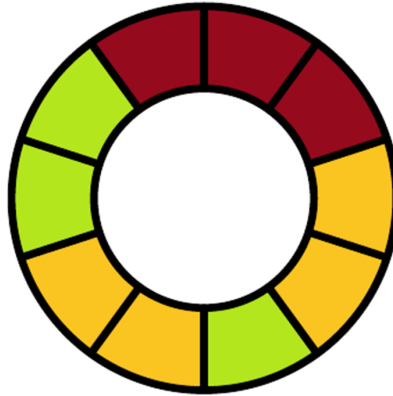
تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۴، بخش دبیرستان، دور انفرادی، سؤال ۶

پرسش ۲. یک عدد بیور، عددی صحیح، مثبت و پنج‌رقمی است که مجموع رقم‌هایش بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد. به یک جفت از عددهای بیور که اختلافشان دقیقاً ۱ است، یک جفت بیور می‌گوییم. عدد کوچک‌تر در یک جفت بیور، بیور MIT نامیده می‌شود و عدد بزرگ‌تر، بیور CIT نامیده می‌شود. تفاضل بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین بیورهای CIT را، در میان همه جفت‌های بیور، بیابید.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۲۰، بخش انفرادی، سؤال ۳

پرسش ۳. یک حلقه به ده قطاع برابر تقسیم شده است. یک ۱۰ قوطی رنگ دارد و برای هر قطاع، یک رنگ را به تصادف و با احتمال برابر انتخاب می‌کند و قطاع را با آن رنگ، رنگ می‌کند. امید ریاضی تعداد مؤلفه‌های هم‌رنگ پس از رنگ‌آمیزی را به دست آورید.

برای مثال، در شکل زیر سه رنگ استفاده شده و در نتیجه پنج مؤلفه هم‌رنگ به دست آمده است.



مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، آزمون تیمی، سؤال ۷

پرسش ۴. رشته ۱۱۰۱ چند بار به عنوان زیر دنباله‌ای از رشته ۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱ ظاهر می‌شود؟ به بیان دیگر، به چند روش می‌توان از رشته دوم رقم‌هایی انتخاب کرد که اگر به ترتیب خوانده شوند، رشته ۱۱۰۱ را بسازند؟

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۸، بخش انفرادی، سؤال ۹

پرسش ۵. ۴ پسر و ۳ دختر داریم. هر پسر یک دختر را و هر دختر یک پسر را انتخاب می‌کند. با فرض این‌که هر انتخاب به صورت تصادفی و با احتمال برابر انجام شود، احتمال این را به دست آورید که دست‌کم یک پسر و یک دختر یکدیگر را انتخاب کنند.

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۱، بخش دبیرستان، دور عمومی، سؤال ۷

پرسش ۶. مایکل n تاس عادی شش وجهی را پرتاب می کند. مقدار n چه باید باشد تا احتمال این که حاصل ضرب عددهایی که می آورد برابر ۲۰۲۵ شود بیشینه گردد؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، آزمون سرعت، سؤال ۱۸

پرسش ۷. یک تورنمنت با ۵ بازیکن به صورت دوره ای برگزار می شود؛ یعنی هر دو بازیکن دقیقاً یک بار با هم بازی می کنند. در هر بازی، احتمال برد بازیکن اول $\frac{1}{3}$ ، احتمال برد بازیکن دوم $\frac{1}{3}$ و احتمال مساوی شدن بازی نیز $\frac{1}{3}$ است.

احتمال این را به دست آورید که دست کم یک بازیکن همه بازی های خود را مساوی کند.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۹، بخش تیمی، سؤال ۵

پرسش ۸. در صفحه ۱۰ نقطه داده شده اند به طوری که هیچ سه تایی از آن ها هم خط نیستند. هر جفت نقطه را با یک پاره خط وصل می کنیم و هر پاره خط را یا قرمز یا آبی رنگ می کنیم. فرض کنید نقطه ای مانند A در میان این ۱۰ نقطه وجود دارد به طوری که:

(۱) تعداد پاره خط های قرمز متصل به A فرد است.

(۲) تعداد پاره خط های قرمز متصل به هر یک از نقطه های دیگر همگی متفاوت اند.

تعداد مثلث های قرمز، یعنی مثلث هایی که هر سه ضلعشان پاره خط قرمز است، را در صفحه بیابید.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۲۰، بخش انفرادی، سؤال ۷

پرسش ۹. فرض کنید $s_2(x)$ مجموع رقم های x در نمایش دودویی باشد. چند جفت عدد صحیح

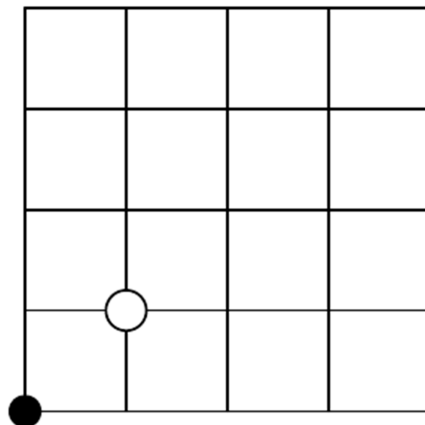
(m, n) وجود دارد به طوری که $0 \leq m < n \leq 127$ و $s_2(m) > s_2(n)$ ؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، دور گاتس، سؤال ۲۲

پرسش ۱۰. دو نفر به نام‌های A و B با سه دسته چوب‌کبریت بازی می‌کنند. در این بازی، یک حرکت عبارت است از این‌که بازیکن تعداد مثبتی چوب‌کبریت از یکی از سه دسته بردارد، به طوری که تعداد چوب‌کبریت‌های باقی‌مانده در آن دسته برابر تفاضل تعداد چوب‌کبریت‌های دو دسته دیگر شود. A و B به نوبت حرکت می‌کنند و A حرکت اول را انجام می‌دهد. بازیکنی که نتواند حرکتی انجام دهد بازنده است. فرض کنید سه دسته به ترتیب ۱۰، x و ۳۰ چوب‌کبریت داشته باشند. بزرگ‌ترین مقدار x را بیابید که برای آن A نتواند برنده بازی شود.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۸، بخش انفرادی، سؤال ۵

پرسش ۱۱. آدام عنکبوت، در گوشه پایین-چپ یک شبکه 4×4 نشسته است. او می‌خواهد به گوشه بالا-راست مربع برود و در ابتدا به اندازه ۹ واحد انرژی دارد. آدام فقط روی خطوط شبکه و در پاره‌خط‌های یک‌واحدی راه می‌رود و نمی‌تواند از شبکه خارج شود. پیمودن یک واحد، یک واحد انرژی برای او هزینه دارد و آدام وقتی انرژی‌اش تمام شود دیگر نمی‌تواند حرکت کند. همچنین آدام به محض رسیدن به گوشه بالا-راست حرکت خود را متوقف می‌کند. همچنین یک حشره روی نقطه واقع در بالا-راست آدام در شبکه قرار دارد. اگر او به این نقطه برود و حشره را شکار کند، یک واحد انرژی به دست می‌آورد.



آدام چند مسیر می‌تواند طی کند تا به گوشه بالا-راست شبکه برسد؟ توجه کنید که آدام اهمیتی نمی‌دهد هنگام رسیدن به مقصد انرژی اضافه داشته باشد یا نه.

مسابقه ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۱۷، بخش تیمی، سؤال ۲

پرسش ۱۲. در یک شبکه ۳ در ۱۲ از مربع‌های واحد، آلبرت می‌خواهد در بعضی از مربع‌های واحد قطرهایی رسم کند، به طوری که قطرها یک دور ساده تشکیل دهند که خودش را قطع یا لمس نکند. آلبرت به چند روش می‌تواند این قطرها را رسم کند؟

مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۶، آزمون سرعت، سؤال ۱۹

پرسش ۱۳. برای هر عدد صحیح مثبت n ، فرض کنید a_n کوچک‌ترین عدد صحیح مثبتی باشد که بر n بخش‌پذیر است و نمایش دودویی آن دقیقاً n تا یک دارد. برای مثال، $a_4 = 60$ و $a_5 = 55$. سه رقم آخر a_{26} را بیابید.

مسابقه ریاضی اینتگرلز پاییز ۲۰۲۵، بخش دبیرستان، آزمون انفرادی، سؤال ۱۱

یک دستگاه چهار رقم نمایش می‌دهد که در ابتدا همگی برابر ۰ اند. دستگاه دو دکمه دارد: دکمه A همه رقم‌ها را یک جایگاه به چپ می‌برد و جایگاه راست‌ترین رقم را با ۰ پر می‌کند؛ برای مثال، ۱۲۳۴ را به ۲۳۴۰ تبدیل می‌کند. دکمه B به عدد فعلی ۱۱ اضافه می‌کند و اگر مجموع از ۹۹۹۹ بیشتر شود فقط چهار رقم آخر را نمایش می‌دهد؛ برای مثال، ۱۲۳۴ را به ۱۲۴۵ و ۹۹۹۸ را به ۰۰۰۹ تبدیل می‌کند.

_____ با توجه به توضیحات بالا، به پرسش‌های ۱۴ تا ۱۷ پاسخ دهید. _____

پرسش ۱۴. کمترین تعداد حرکت لازم برای این‌که دستگاه ۲۰۲۰ را نمایش دهد چقدر است؟

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۰، بخش مدرسه راهنمایی، سؤال ۱

پرسش ۱۵. اگر حداکثر سه حرکت با دستگاه انجام دهید، چند خروجی متفاوت ممکن است؟

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۰، بخش مدرسه راهنمایی، سؤال ۲

پرسش ۱۶. دکمه B اکنون عدد n را به نمایشگر چهاررقمی اضافه می‌کند. برای چند عدد صحیح مثبت $n \leq 20$ می‌توان با استفاده از دستگاه به هر خروجی چهاررقمی ممکن رسید؟

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۰، بخش مدرسه راهنمایی، سؤال ۳

پرسش ۱۷. فرض کنید عملکرد دکمه A به این شکل تغییر کند: همهٔ رقم‌ها را یک جایگاه به راست ببرد و جایگاه چپ‌ترین رقم را با ۲ پر کند. دکمه B همچنان به عدد فعلی ۱۱ اضافه می‌کند و در صورت نیاز فقط چهار رقم آخر را نمایش می‌دهد. در این صورت، کمترین تعداد حرکت لازم برای نمایش ۲۰۲۰ چقدر است؟

تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۰، بخش مدرسهٔ راهنمایی، سؤال ۴

پرسش ۱۸. برای یک عدد صحیح $n \geq 2$ ، فرض کنید G_n یک شبکهٔ $n \times n$ از خانه‌های واحد باشد. یک زیرمجموعه از خانه‌ها $H \subseteq G_n$ را نیمه‌کامل می‌نامیم اگر و تنها اگر هر سطر G_n دست‌کم یک خانه در H داشته باشد و هر ستون G_n نیز دست‌کم یک خانه در H داشته باشد. یک زیرمجموعه از خانه‌ها $K \subseteq G_n$ را نیمه‌بی‌نقص می‌نامیم اگر و تنها اگر زیرمجموعهٔ سرهای مانند $L \subset K$ وجود داشته باشد به طوری که $|L| = n$ و هیچ دو عضوی از L در یک سطر یا یک ستون نباشند.

فرض کنید $\vartheta(n)$ کوچک‌ترین عدد صحیح مثبتی باشد که هر زیرمجموعهٔ نیمه‌کامل $H \subseteq G_n$ با $|H| \geq \vartheta(n)$ ، نیمه‌بی‌نقص نیز باشد. مقدار $\vartheta(20)$ را حساب کنید.

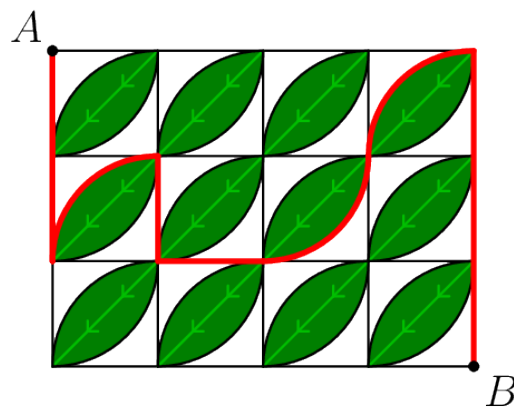
مسابقهٔ ریاضی کلتک-هاروی ماد (CHMMC) سال ۲۰۲۰، بخش انفرادی، سؤال ۱۵

پرسش ۱۹. مورچه‌ای روی یک پیاده‌رو راه می‌رود. پیاده‌رو به شکل یک جدول ۳×۴ است که روی هر خانه آن یک برگ مانند شکل زیر قرار گرفته. تعداد راه‌هایی را بیابید که مورچه بتواند از نقطه A به نقطه B برود، اگر فقط بتواند

(۱) بالا، پایین، یا راست برود (روی مرز یک قطعه پیاده‌رو)، یا

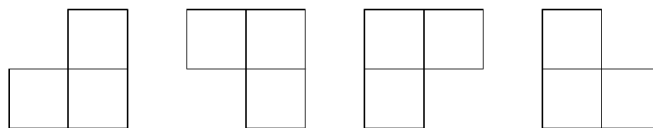
(۲) بالا-راست برود (روی یکی از دو نیمه حاشیه یک برگ)،

و نتواند هیچ مرز یا نیمه حاشیه‌ای را بیش از یک بار طی کند. یک مسیر معتبر در شکل نمایش داده شده است.



تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز (JHMT) سال ۲۰۲۲، بخش دبیرستان، دور عمومی، سؤال ۸

پرسش ۲۰. آنیکا یک جدول ۴ در ۶ دارد. به چند روش می‌تواند این مستطیل را با تریومینوهای L شکل، که در پایین نشان داده شده‌اند، کاشی‌کاری کند و هر تریومینو را قرمز، سبز، یا آبی رنگ کند، به طوری که هر دو تریومینوی همسایه رنگ‌های متفاوت داشته باشند؟ دو تریومینو همسایه‌اند اگر در حداقل یک ضلع از جدول مشترک باشند.



مسابقه ریاضی باشگاه اکستر (EMCC) سال ۲۰۲۵، دور گاتس، سؤال ۲۴